# Bölüm 4

# Açık Önermeler

## 4.1 ÖNERME FONKSİYONLARI

**Tanım:** *Bir $X$ kümesi verilsin. $X$ kümesinin her $x$ öğesine karşılık $p(x)$ ile gösterilen bir önerme belirlenmişse, $p$ ye, $X$ kümesi üzerinde tanımlanmış bir* önerme fonksiyonu (açık önerme)*, denilir.*

Önerme fonksiyonu, değişkenin her değeri için ya *doğru* ya da *yanlış* değer alır.

**Örnek**

$$p(x) \equiv (x + 5 > 7)$$

şeklinde tanımlanan $p$ önerme fonksiyonu, $\mathbb{Z}$ ile temsil edeceğimiz Tamsayılar Kümesi üzerinde tanımlıdır. Buradan hemen görüleceği üzere; $x > 2$ ise $p(x)$ doğru, $x < 2$ ise $p(x)$ yanlış bir önermedir.

Bir küme üzerinde tanımlı bir önerme, kümeye ait her öğe için doğru olmayabilir. Uygulamada, böyle bir önermenin her öğe için mi, bazı öğeler için mi, bir tek öğe için mi doğru olduğunu ya da olmadığını bilmek gerekebilir. Her seferinde bunu sözle anlatmak güçlüğünden sakınmak için, bu kavramları, adına nicelik belirteçleri denilen bazı simgelerle ifade edeceğiz.

### 4.1.1 Evrensel Belirteç

Bir $A$ kümesi üzerinde tanımlanmış bir $p$ önerme fonksiyonu verilsin. Eğer $A$ kümesinin her $x$ öğesi için $p(x)$ doğru bir önerme ise, bunu kısaca,

$$\begin{gathered} \forall x p(x) \\ (\forall x \in A) p(x) \\ \forall x (x \in A) \Rightarrow p(x)) \qquad (4.1) \end{gathered}$$

simgelerinden birisiyle gösterecek ve "her $x \in A$ için $p(x)$ doğrudur", diye okuyacağız. $\forall$ simgesi evrensel niceleyicidir ve *"her"* diye okunur.

### 4.1.2 Varlık Belirteci

Bir $A$ kümesi üzerinde tanımlanmış bir $p$ önerme fonksiyonu verilsin. Eğer $p(x)$ önermesi doğru olacak şekilde, $A$ kümesinin bazı (dolayısıyla en az bir tane) $x$ öğeleri varsa, bunu kısaca,

$$\begin{aligned} &\exists x\, p(x) \\ &(\exists x \in A) p(x) \\ &\exists x (x \in A) \wedge p(x)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

simgelerinden birisiyle gösterecek ve "bazı $x \in A$ için $p(x)$ doğrudur" diye okuyacağız. $\exists$ simgesi varlık belirtecidir ve yerine göre, *"vardır"* ya da *"bazı"* diye okunur. Bazı hallerde bir tek $x \in A$ için $p(x)$ önermesinin doğruluğunu belirtmek gerekebilir. Bu durumda, varlık belirtecinin üstüne bir yıldız koyacağız; yani

$$(\exists^* x \in A) p(x), \qquad \exists^* x (x \in A \wedge p(x)) \tag{4.3}$$

simgeleri, $p(x)$ önermesini sağlayan bir ve yalnızca bir tane $x \in A$ öğesinin varlığını belirtecektir. $(1), (2)$ ya da $(3)$ şeklindeki ifadelere nicelenmiş ifadeler diyeceğiz.

### 4.1.3 Nicelemelerin Değillenmesi

NICELENMIŞ İFADELERIN OLUMSUZLANMASI

$$p = \textit{Her insan okur.}$$

önermesini simgelerle ifade edelim. $H$ insanlar kümesini göstermek üzere,

$$p \equiv \forall x (x \in H \Rightarrow x \quad \textit{okur.})$$

olacaktır. Şimdi $p$ nin değilini (olumsuzunu) düşünelim :

$$\begin{aligned} p &\equiv \neg\ (\textit{Her insan okur.}) \\ &\equiv \textit{Okumayan insanlar vardır.} \\ &\equiv \textit{Bazı insanlar okumaz.} \\ &\equiv \exists x (x \in H \wedge\ x \text{ okumaz.}) \end{aligned}$$

diyebiliriz.

Şimdi bunu genel olarak düşünenelim:

$$\forall x (x \in A \Rightarrow p(x)) \tag{4}$$

önermesi ya doğru ya da yanlıştır. Bu önermenin doğru olması demek, her $x \in A$ için $p(x)$ önermesinin doğru olması demekti. Yanlış olması demek ise, $p(x)$ önermesi yanlış (dolayısıyla $\neg p(x)$ doğru) olacak çekilde enaz bir $x \in A$ var demektir. Ohalde

$$\neg[\forall x (x \in A \Rightarrow p(x))] \equiv \exists x (x \in A \wedge \neg p(x)) \tag{5}$$

olur. Eğer $A$ kümesinin bir başkasıyla karışma olasılığı yoksa, bunu, çok daha kısa olarak,

$$\neg[\forall x\ p(x)] \equiv \exists x\ \neg p(x) \tag{6}$$

şeklinde de yazabiliriz. Şimdi de

$$q \equiv \textit{Bazı insanlar okur.}$$

önermesini düçünelim. Bunun simgelerle ifadesi, yine $H$ insanlar kümesi olmak üzere,

$q \equiv \exists x(x \in H \wedge x\ \ \textit{okur.})$ olacaktır. Bunun olumsuzu

$$\begin{aligned} \neg q &\equiv \neg\ \textit{Bazı insanlar okur.} \\ &\equiv \textit{Hiçbir insan okumaz.} \\ &\equiv \textit{Her insan okumaz} \\ &\equiv \forall x(x \in H \Rightarrow x\ )\ \textit{okumaz.}) \end{aligned}$$

olacaktır.

**Uyarı:** *"Her insan okumaz."* ifadesi dilimizde, çoğu kez *"Hiçbir insan okumaz."* yerine değil, *"Okumayan insanlar da vardır."* anlamında kullamlır. Ancak bunun simgesel mantık açısından yanlış olduğu apaçıktır. Buna göre, biz

$$\textit{Her insan okumaz} \equiv \textit{Hiçbir insan okumaz.}$$

denkliğini varsayacağız. Şimdi bunu genel olarak düşünelim:

$$\exists x(x \in A \wedge p(x)) \tag{6}$$

önerınesinin doğru olması demek, $p(x)$ önermesi doğru olacak şekilde enaz bir $x \in A$ öğesi var demektir. Bu önermenin yanlış olması demek, hiçbir $x \in A$ için $p(x)$ doğru değil demektir; yani her $x \in A$ için $\neg p(x)$ doğru oluyor demektir. Öyleyse,

$$\neg[\exists x(x \in A \wedge p(x))] \equiv \forall x(x \in A \Rightarrow \neg p(x)) \tag{7}$$

olacaktır. Eğer $A$ kümesinin bir başkasıyla karışması olasılığı yoksa, bunu, daha basit olarak,

$$\neg[\exists x\ p(x)] \equiv \forall x\ \neg p(x) \tag{8}$$

şeklinde de ifade edebiliriz.

### 4.1.4 İki Değişkenli Önerme Fonksiyonları

$A$ ile $B$ herhangi iki küme olsun. Her $x \in A$ ve her $y \in B$ için, $x$ ile $y$ öğelerine bağlı bir

$$p(x, y)$$

önermesi tanımlanmışsa, $p$ ye iki değişkenli bir önerme fonksiyonudur, denilir.

**Tanım:**

$$P(x, y) \equiv \forall x(x \in A \Rightarrow [\forall y(y \in B \Rightarrow P(x, y))])\neg \tag{8}$$

*önermesini, kısaca,*

$$p(x,y) \equiv \forall x \forall y\ p(x,y) \tag{9}$$

*simgesiyle göstereceğiz.*

Eğer $A$ ve $B$ kümelerini belirtmek gerekiyorsa (9) yerine

$$P(x,y) \equiv (\forall x \in A)(\forall y \in B)\ p(x,y) \tag{10}$$

diyebiliriz. Bu öiıermeyi şöyle okuyacağız :

*"Her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $p(x,y)$ doğrudur".*

**Tanım:**

$$Q(x,y) \equiv \exists x(x \in A \wedge [\exists y(y \in B \wedge p(x,y))]) \tag{10}$$

önermesini

$$Q(x,y) \equiv \exists x\, \exists y p(x,y) \tag{11}$$

ile gösterecek ve

*"bazı $x$ ve bazı $y$ için $p(x,y)$ doğrudur"*

diye okuyacağız.

$A$ ile $B$ kümelerini belirtmek gerektiğinde (11) yerine,

$$Q(x,y) \equiv (\exists x \in A)(\exists y \in B)p(x,y) \tag{12}$$

yazabiliriz.

**Tanım:**

$$R(x,y) \equiv \forall x(x \in A \Rightarrow [\forall y(y \in B \wedge p(x,y))]) \tag{13}$$

önermesini,

$$R(x,y) \equiv \forall x(x \in A \Rightarrow [\exists y(y \in B \wedge p(x,y))]) \tag{14}$$

ile gösterecek ve bunu

*"Her $x$ için öyle bir $y$ vardır ki, $p(x,y)$ doğru olur."*

diye okuyacağız.

$A$ ve $B$ kümelerini belirtmek gerektiği zaman (14) yerine,

$$R(x,y) \equiv (\forall x \in A)(\exists y \in B)p(x,y) \tag{15}$$

diyebiliriz.

**Tanım:**

$$S(x,y) \equiv \exists x(x \in A \wedge [\forall y(y \in B \Rightarrow p(x,y))]) \tag{16}$$

önermesini

$$S(x,y) \equiv \exists x\, \forall y p(x,y) \tag{17}$$

simgesiyle gösterecek ve bunu,

*"öyle bir $x$ var ki her $y$ için $p(x,y)$ doğrudur."*

diye okuyacağız.

$A$ ile $B$ kümelerini belirtmek gerekiyorsa (15) yerine

$$S(x,y) \equiv (\exists x \in A)(\forall y \in B)p(x,y) \tag{18}$$

diyebiliriz.
**Belit:**
a) $\forall x\ \forall y\ p(x,y) \forall y\ \forall x\ p(x,y)$
b) $\exists x\ \exists y\ p(x,y) \equiv \exists y\ \exists x\ p(x,y)$ olduğunu varsayacağız.

**Teorem:** *Aşağıdaki bağıntı vardır.*

$$\forall x \exists y\, p(x,y) \not\equiv \exists y \forall x\, p(x,y)$$

*İspat:*
Gerçekten, bu iki önermenin denk olmadığı (5.7) ile (5.10) dan görülebilir. Biz bunu bir örnekle açıklayalım : $A$ insanlar kümesi ve $B$ de kitaplar kümesi olsun. $x \in A$ ve $y \in B$ ise $p(x,y)$ önermesini,

$$p(x,y) \equiv (x,\ y \textit{ yi okudu})$$

diye tanımlayalım. Buna göre,
$\forall x \exists y\, p(x,y) \equiv$ *Her insan enaz bir kitap okudu.*
$\forall x \exists y\, p(x,y) \equiv$ *Öyle bir kitap vardır ki her insan bu kitabı okudu.*
olacaktır.
Şimdi $P, Q, R, S$ ifadelerinin olumsuzluklarım arayalım.
**P nin olumsuzu:**

$$F(x) \equiv \forall y (y \in B \Rightarrow p(x,y))$$

dersek (5.1) ifadesi

$$P(x,y) \equiv \forall x (x \in A \Rightarrow F(x)$$

şeklini alır. Bunun olumsuzu, (4.2) gereğince,

$$\neg p(x,y) \equiv \exists x (x \in A \wedge \neg F(x))$$

dir, ki burada

$$\neg F(x) \equiv \exists y (y \in B \wedge p(x,y))$$

dir. Bunu yukarıdaki yerine yazarsak,

$$\neg p(x,y) \equiv \exists x (x \in A \wedge [\exists y (y \in B \wedge p(x,y))$$

çıkar. Demek ki

$$\neg[\forall x \forall y\, p(x,y)] \equiv \exists x \exists y\, p(x,y)$$

olur.
Benzer yolla aşağdakiler de gösterilebilir.

**Teorem:** *Aşağıdaki bağıntılar vardır.*

$$\exists x \exists y\, p(x,y) \equiv \forall x \forall y\, \neg p(x,y)$$
$$\forall x \exists y\, p(x,y) \equiv \exists x \forall y\, \neg p(x,y)$$
$$\exists x \forall y\, p(x,y) \equiv \forall x \exists y\, \neg p(x,y)$$

## 4.2 ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki sözlü ifadeleri simgelerle gösteriniz ve sonra da olumsuzlaştırınız. Herbirisinin olumsuzunu sözle ifade ediniz.

   a) Her insan düşünür.

   b) Bazı insazılar düşünür.

   c) Her insan düşünmez.

   d) Bazı insanlar düşünmez.

2. Aşağıdaki önermeleri sözle ifade ediniz ve sonra olumsuzlaştırınız.

   a) $\forall x(x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 > 0$

   b) $\exists x(x \in \mathbb{R} \wedge x^2 < x$

   c) $\forall x(x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x + 1 > 0$

   d) $\exists x(x \in \mathbb{R} \;\wedge 3x - 2 = 0$

3. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz. Sonra herbirinin olumsuzunu yazınız.

   a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = 1)$

   b) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 1)$

   c) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = 1)$

   d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 1)$

4. $x \in \mathbb{R}$ iken, aşağıdaki önermenin değilini bulunuz.

$$\forall x\left((x - 5 \leq 0) \vee (\exists x(5x - 3 \geq 0))\right)$$