

## Bölüm 2

# ÖNERMELER CEBİRİ

### 2.1 ÖNERMELER

#### 2.1.1 Önerme Nedir?

**Tanım:** *Doğru ya da yanlış bir hüküm bildiren ama aynı zamanda hem doğru hem de yanlış olmayan ifadelere önerme denilir. Her önerme bir yargı, bir bildirim, bir bilgi'dir. Önerme'nin doğru ya da yanlış oluşu, onun doğruluk değeri'dir. Bir önerme, hem doğru hem de yanlış olamayacağı gibi, biraz doğru, biraz yanlış da olamaz. İki-değerli mantığın temeli budur.*

Bir bilgi vermeyen, bir hüküm bildirmeyen ifadeler önerme değildir.

#### Örnekler

1. *Londra, İngiltere'nin başkentidir.*
2. *Konya İç Anadolu bölgesindedir.*
3.  $2 + 2 = 4$
4. *Pekin, Avrupa kıtasındadır.*
5.  $29 < 12$
6. *Nereye gidiyorsun?*
7. *Eyvah!*
8. *Merhaba!*
9. *Kapıyı ört.*
10. *Ahmet!*

Bu ifadelerden ilk beşi birer hüküm bildirir; dolayısıyla birer önermedir. 1 inci, 2 nci ve 3 üncü önermelerin doğruluk değeri *doğru*; 4 üncü ve 5 incinin doğruluk değerleri *yanlış* ır. Geri kalan ifadeler birer hüküm bildirmez; dolayısıyla birer önerme değildir.

Mantık, doğru önermeden doğru önerme çıkarma sanatıdır. Usavurma (akıl yürütme) kuralları denilen bu sanatı, kişinin bilgisine, konuştuğu dile, duygularına, çevre koşullarına, ... bağlı olmaktan kurtarmak için, soyut bir küme üzerinde tanımlı matematiksel işlemlerle belirleyeceğiz. Soyut matematiksel bir yapı olarak ortaya konulan bu sistem evrenseldir ve istenilen her somut duruma kolayca uygulanır. Bu sisteme *Önermeler Cebiri*, *Boole Cebiri*, *Matematiksel Mantık*, *Simgesel Mantık* adları verilir.

Önermeleri,

$$p, q, r, \dots$$

gibi harflerle; önermelerin doğruluk değerlerini de,

$$D = 1 = \text{Doğru} \quad Y = 0 = \text{Yanlış}$$

simgeleriyle göstereceğiz; yani, bir  $p$  önermesinin doğru olması **D** veya **1**, yanlış olması **Y** veya **0** ile gösterilir. Burada 1 ile 0 her dile uyabilen gösterimlerdir; sayısal değerleri yoktur. Yalnızca, önermenin doğru ya da yanlış olduğunu belirten birer simgedir.

### Yalın Önermeler

Yalnızca bir hüküm içeren önermeye, *yalın bir önerme*, denilir.

### Örnekler

$p$ : *Kar yağıyor.*

$q$ : *Ankara'da yaz aylarında hava çok soğuktur.*

önermeleri yalındır.  $p$  önermesinin doğruluk değeri 1;  $q$  önermesinin doğruluk değeri 0 dir. Daha kısa olarak,  $p$  önermesine *doğru*,  $q$  önermesine *yanlış* diyeceğiz.

### Bileşik Önermeler

Birden çok hüküm içeren önermeye, *bileşik bir önerme*, denilir.

### Örnekler

$p$ : *Antalya, Akdeniz bölgesindedir ve Rize, Karadeniz bölgesindedir.*

$q$ : *Bugün hava sıcak değildir veya ben üşüyorum.*

önermeleri bileşiktir.  $p$  önermesinin doğruluk değeri, onu oluşturan,

$p_1$  : Antalya, Akdeniz bölgesindedir.

$p_2$  : Rize, Karadeniz bölgesindedir.

önermelerinin doğruluk değerlerine bağlıdır. Benzer olarak,  $q$  önermesinin doğruluk değeri,  $q$  yu oluşturan,

$q_1$  : Bugün hava sıcak değildir.

$q_2$  : Ben üşüyorum.

önermelerinin doğruluk değerlerine bağlıdır.

Bileşik önermelerin doğruluk değerlerinin nasıl belirleneceğini, bundan sonraki kesimlerde inceleyeceğiz.

### Denk Önermeler

Doğruluk değerleri aynı olan önermelere, *denk önermeler* ya da *eşdeğer önermeler* denilir.  $p$  ile  $q$  önermelerinin denkliği,  $p \equiv q$  simgesiyle gösterilir ve " $p$  denk  $q$ " diye okunur.

Önermelerin denkliği araştırılırken, yalnızca onların doğruluk değerlerine bakılır. Önermelerin anlamları dikkate alınmaz. Örneğin,

$p$  : ( $2^3 = 8$ ) ile  $q$  : Bir haftada 7 gün vardır önermelerinin doğruluk değerleri 1 dir. Dolayısıyla, birbirlerine denktirler: ( $p \equiv q$ ). Ama bu iki önermenin anlamları farklıdır.

### 2.1.2 Alıştırılmalar

1. Bildiğiniz, tanımlı ve tanımsız terimler yazınız.
2. Bunlar arasında, matematik terimi olanları ayırınız.
3. Önerme, ondalık, kök, küp, kesir, basamak, merdiven, hane, ev, büyük, küçük, doğru, yanlış, bölme, nokta, doğru, çizgi, eğri, düzlem, ışın, açı, dik, eğik, dörtgen, kare, masa sözcükleri veriliyor.
  - (a) Bu sözcükler arasında matematik terimi olanları ayırınız.
  - (b) Matematik terimi olanlardan hangileri tek anlamlıdır? Hangileri birden çok anlama sahiptir?
  - (c) Bunlardan hangileri tanımlıdır? Hangileri tanımsızdır?

- |  |   |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>4. <math>a</math> : Merhaba!</li> <li><math>c</math> : Pencereyi aç.</li> <li><math>e</math> : <math>5 + 7 &lt; 5</math></li> <li><math>q</math> : Köpek evcildir.</li> <li><math>s</math> : 5 asal bir sayıdır.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li><math>b</math> : Adana Akdeniz bölgesindedir.</li> <li><math>d</math> : <math>5 + 7 = 12</math></li> <li><math>p</math> : Kedi evcil değildir.</li> <li><math>r</math> : 8 tek bir sayıdır.</li> <li><math>t</math> : 1 Ocak 2000</li> </ol> |
|--|---|

ifadeleri veriliyor.

- (a) Verilen bu ifadeler arasından önerme olanları ve olmayanları ayırınız.

- (b) Önerme olanların doğruluk değerlerini bulunuz.
- (c) Bu önermelerden birbirlerine denk olanları  $s \equiv t$  simgesiyle belirtiniz.
- (d) Bu önermelerden birbirine denk olmayanları  $s \not\equiv t$  simgesiyle belirtiniz.
5. Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini belirleyiniz.
- (a)  $(-5)^3 < 125$                       (b) *Ay bir gezegendir.*
- (c)  $5^3 = 125$                               (d) *Dünya bir gezegen değildir.*
6. Yukarıdaki önermeler arasında birbirlerine denk olanları belirtiniz.
7. Aşağıdaki önermeler arasında birbirlerine denk olanları belirtiniz.
- (a)  $(-3)^2 < 9$                       (b) *Tokyo, Japonya'nın başkentidir.*
- (c)  $3^3 = 27$                               (d) *3 asal sayı değildir.*
8. Önerme olan ve olmayan ifadeler yazınız.
9. Yazdıklarınız arasında, önerme olanların doğruluk değerlerini belirleyiniz.
10. Birbirine denk olan ve olmayan önermeler yazınız.

## 2.2 ÖNERMELER CEBİRİ

Önermeler kümesi üzerinde  $\{ \text{ve, veya, değil, ise} \}$  denilen işlemleri tanımlayarak, verilen önermelerden yeni önermeler çıkarmayı öğreneceğiz. Bunu yapınca, doğru önermelerden, doğru önermeler çıkarmanın yöntemlerini de ortaya koymuş olacağız. Bu işlemlere, bazı kaynaklarda, *bağlaç* denilir. Bu deyim, dilbilgisindeki "bağlaç" kavramından farklıdır ve verilen önermeleri, belli bir kural ile, birbirine bağlayarak yeni bir önerme oluşturduğunu ifade eder.

Tanımlayacağımız bu işlemler sonunda ortaya çıkan önermelerin doğruluk değerlerini, *doğruluk tablosu* denilen tablolarda daha kolay olarak görebiliriz. Bu tabloları, ilgili işlemle birlikte vereceğiz.

### Ve İşlemi (bağlacı)

**Tanım:**  $p$  ile  $q$  birer önerme ise,  $p \wedge q$  bileşik önermesi,

$$1 \wedge 1 = 1, \quad 1 \wedge 0 = 0, \quad 0 \wedge 1 = 0, \quad 0 \wedge 0 = 0 \quad (2.1)$$

*kurallarıyla tanımlanır; p ve q diye okunur.* Bu kuralları, aşağıdaki simgelerle de tanımlayabiliriz.

$$D \wedge D = D, \quad D \wedge Y = Y, \quad Y \wedge D = Y, \quad Y \wedge Y = Y \quad (2.2)$$

$p$  ile  $q$  önermeleri,  $p \wedge q$  bileşik önermesinin *bileşenleri*'dir.

$p \wedge q$  bileşik önermesinin doğru olması için,  $p$  ile  $q$  bileşenlerinin her ikisinin de doğru olması gerekli ve yeterlidir.

$p$	$q$	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$p \wedge q$  bileşik önermesinin doğruluk tablosu, yanda gösterilmiştir.

### Örnekler

- 1)  $-8 < 0$  ve  $0 < +8$
- 2) 6 bir çift sayıdır ve 4 bir tek sayıdır.
- 3) 4 bir asal sayıdır ve  $4 < 5$  dir.
- 4) 4 bir asal sayıdır ve  $5 < 4$  dür.

Bu bileşik önermelerden birincisinin doğru, ötekilerin yanlış olduğunu sezebiliyor musunuz?

Bunların doğruluk değerlerini, tanıma ve tabloya göre, ayrı ayrı belirleyiniz.

### Teorem:

$p, q, r$  üç önerme ise, aşağıdaki özellikler sağlanır:

1.  $p \wedge p \equiv p$  ( $\wedge$  nin Eşgüçlülük Özeliği)
2.  $p \wedge q \equiv q \wedge p$  ( $\wedge$  nin Yer Değişim Özeliği)
3.  $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$  ( $\wedge$  nin Birleşme Özeliği)

*İspat:* Bunların ispatları, sırasıyla, aşağıdaki doğruluk tablolarından görülebilir. Bu tabloları inceleyiniz ve ispatları açıklayınız.

$p$	$p$	$p \wedge p$
1	1	1
0	0	0
$\uparrow$		$\uparrow$

$p \equiv p \wedge p$

$p$	$q$	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0
		$\uparrow$	$\uparrow$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
					↑	↑

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

**Uyarı:** "  $\wedge$  " nin birleşme özeliğini daha kısa göstermek için, parantezleri kaldırıp,

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r) = p \wedge q \wedge r$$

biçiminde yazabiliriz.

### Veya İşlemi (bağlacı)

**Tanım:**  $p$  ile  $q$  birer önerme ise,  $p \vee q$  bileşik önermesi,

$$1 \vee 1 = 1, \quad 1 \vee 0 = 1, \quad 0 \vee 1 = 1, \quad 0 \vee 0 = 0 \quad (2.3)$$

kurallarıyla tanımlanır;  $p$  veya  $q$  diye okunur.

Bu kurallar, aşağıdaki simgelerle de gösterilebilir:

$$D \vee D = D, \quad D \vee Y = D, \quad Y \vee D = D, \quad Y \vee Y = Y$$

$p$  ile  $q$  önermeleri,  $p \vee q$  bileşik önermesinin *bileşenleri*'dir.

$p \vee q$  bileşik önermesinin yanlış olması için,  $p$  ile  $q$  bileşenlerinin her ikisinin de yanlış olması gerekli ve yeterlidir.

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$p \vee q$  bileşik önermesinin doğruluk tablosu, yanda gösterilmiştir.

### Örnekler

- $(2 < 7) \vee (1 + 5 = 6)$
- $(2 + 2 = 4) \vee (\text{Paris, Amerika kıtasındadır.})$
- $(2 + 2 = 5) \vee (\text{Paris, Avrupa kıtasındadır.})$
- $(4 + 2 = 7) \vee (3 + 1 = 6)$

Bu bileşik önermelerden ilk üçünün doğru, dördüncünün yanlış olduğunu sezebiliyor musunuz?

Bu bileşik önermelerin doğruluk değerlerini, tanıma ve tabloya göre, ayrı ayrı belirleyiniz.

**Teorem:**  $p, q, r$  üç önerme ise, aşağıdaki özellikler sağlanır:

1.  $p \vee p \equiv p$  ( $\vee$  nin Eşgüçlülük Özeliği)
2.  $p \vee q \equiv q \vee p$  ( $\vee$  nin Yer Değişim Özeliği)
3.  $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$  ( $\vee$  nin Birleşme Özeliği)

*İspat:* Bu özelliklerin ispatları, sırasıyla, aşağıdaki doğruluk tablolarında görülmektedir. Bu tabloları inceleyiniz ve ispatları açıklayınız.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
0	0	0
↑		↑
		$p \vee p \equiv p$

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0
		↑	↑

$p \vee q \equiv q \vee p$						
p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0
					↑	↑

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

**Uyarı:** "  $\vee$  " nin birleşme özeliğini daha kısa göstermek için, parantezleri kaldırıp, aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r) = p \vee q \vee r$$

### 2.2.1 Dağılma Özellikleri

**Teorem:**  $p, q, r$  üç önerme ise aşağıdaki özellikler sağlanır:

1.  $\wedge$  nin  $\vee$  üzerine soldan dağılma özeliği:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

2.  $\vee$  nin  $\wedge$  üzerine soldan dağılma özeliği:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

3.  $\wedge$  nin  $\vee$  üzerine sağdan dağılma özeliği:

$$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

4.  $\vee$  nin  $\wedge$  üzerine sağdan dağılma özeliği:

$$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

İspat: 1. Özeliğin ispatı, aşağıdaki tablodan görülür.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
						↑	↑

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

2. Özeliğin ispatı, aşağıdaki tablodan görülür:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
						↑	↑

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

## Değilleme

### Bir Önermenin Olumsuzu (Değili)

**Tanım:** Bir  $p$  önermesinin doğruluk değerinin değiştirilmesiyle elde edilen yeni önermeye,  $p$  nin olumsuzu (değili) denilir;  $p'$ ,  $\sim p$  ya da  $\neg p$  simgelerinden birisi ile gösterilir ve " $p$  nin olumsuzu (değili)", diye okunur.



**Örnekler**

$$\begin{array}{ll}
p : \text{Ödevimi yaptım.} & \Rightarrow p' : \text{Ödevimi yapmadım.} \\
q : \text{Bir yıl 12 aydır.} & \Rightarrow q' : \text{Bir yıl 12 ay değildir.} \\
r : \text{11 asal sayı değildir.} & \Rightarrow r' : \text{11 asal sayıdır.}
\end{array}$$

$p$	$p'$	$(p')'$
1	0	1
0	1	0
$\uparrow$		$\uparrow$

**Teorem:** Bir önerme doğru ise, değili yanlıştır.

Önermenin kendisi yanlıştır ise, değili doğrudur.

Bir önermenin deęilinin değili, kendisine denktir; yani,  $p = (p')'$  dır.

Bu özelliklerin ispatları tablodan görülmektedir.

**Örnekler**

Aşağıdaki önermeleri değilleyiniz.

$p$  : Viyana, Asya kıtasındadır.

$q$  :  $2 \times 3 \neq 6$

$p$  : Berlin, başkent değildir.

$r$  :  $7 \not< 15$

**Çözüm:**

$p'$  : Viyana, Asya kıtasında değildir.

$q'$  :  $2 \times 3 = 6$

$p$  : Berlin, başkenttir.

$r'$  :  $7 < 15$

Burada şuna dikkat edilmelidir.  $p$  : "Viyana, Asya kıtasındadır" önermesinin değili, "Viyana, Asya kıtasında değildir." önermesidir.  $p_1$  : "Viyana, Avrupa kıtasındadır." önermesi  $p$  nin değili olamaz; o başka bir önermedir. Bu olgu, önermelerin denkliği ve olumsuzlanması konularında, anlamlarıyla ilgilenmemek gerektiğini açıklıkla ortaya koyar.

**2.2.2 Uygulamalar**

1. Önceki alıştırmalarda verilen önermeleri değilleyiniz.
2. Bu önermeler ile değillerinin doğruluk değerlerini karşılaştırınız.
3.  $p, q, s, t$  önermeleri ile değillerinin doğruluk değerlerini aynı tabloda gösteriniz.

4. Bir  $p$  önermesi yazınız. Bunu, sırayla, 1,2,3,4,5, . . . kere değilleyiniz. Her defasında bulduğunuz önermelerin doğruluk değerlerini  $p$  ve  $p'$  nün doğruluk değerleri ile karşılaştırınız. Bir kural çıkarabildiniz mi?
5.  $p, q, r, s$  dört önerme ise, bu önermelerin;
- Birer birer,
  - İkişer ikişer,
  - Üçer üçer,
  - Dörder dörder
- doğruluk tablolarını yapınız.
6. Doğru ve yanlış önermeler yazınız. Yazdığımız önermeleri değilleyiniz.

### 2.2.3 Bileşik Önermelerin Değillenmesi

#### De Morgan Kuralları

$p$  ile  $q$  iki önerme ise, aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$(p \vee q)' = (p' \wedge q')$$

$$(p \wedge q)' = (p' \vee q')$$

*İspat:* İlk eşitliğin ispatı, aşağıdaki tablolardan görülür.

$p$	$q$	$p'$	$q'$	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1
					↑	↑

$$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$$

$p$	$q$	$p'$	$q'$	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
					↑	↑

$$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$$

### Örnekler

1. *(Bu gün hava sıcaktır veya yaz mevsimindeyiz.)' ≡ (Bu gün hava sıcak değildir ve yaz mevsiminde değiliz.)*

2.

$$[p \vee (q \wedge r)]' \equiv p' \wedge (q \wedge r) \quad (\text{De Morgan Kuralı})$$

### 2.2.4 Totoloji ve Çelişki

Bazı bileşik önermeler daima doğru, bazıları ise daima yanlış olabilir.

*Bileşenlerinin bütün doğruluk değerleri için, daima 1 (doğru) değerini alan bileşik önermeye bir totoloji (hepdoğru) denilir.*

*Bileşenlerinin bütün doğruluk değerleri için, daima 0 (yanlış) değerini alan bileşik önermeye bir çelişki (hepyanlış) denilir.*

**Örnekler:** Aşağıdaki ifadeleri ispatlayınız.

1.  $p$  bir önerme ise,  $p \vee p'$  bileşik önermesi bir totolojidir.
2.  $p$  bir önerme ise,  $p \wedge p'$  bileşik önermesi bir çelişkidir.
3.  $p$  bir önerme ise,  $p \vee 1$  bir totolojidir.
4.  $p$  bir önerme ise,  $p \wedge 0$  bir çelişkidir.
5.  $(p \wedge q)' \vee (p \vee q)$  bileşik önermesi bir totolojidir.

*Çözüm:* Birinci ve ikinci ifadelerin ispatları aşağıdaki tablolardan çıkar.

$p$	$p'$	$p \vee p'$
1	0	1
0	1	1

$p$	$p'$	$p \wedge p'$
1	0	0
0	1	0

Buradan,  $p \vee p' \equiv 1$  ve  $p \wedge p' \equiv 0$  çıkar.

Beşinci ifadenin ispatını, aşağıdaki doğruluk tablosundan görebiliriz.

$p$	$q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q)'$	$p \vee q$	$(p \wedge q)' \vee (p \vee q)$
1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1

Bütün doğruluk değerleri 1 olduğundan,  $(p \wedge q)' \vee (p \vee q)$  bileşik önermesi bir *totolojidir*.

Bazan, doğruluk tablosunu düzenlemek yerine, önermeler cebirinin uygun kurallarını kullanarak da problemleri çözebiliriz:

$$\begin{aligned}
(p \wedge q)' \vee (p \vee q) &\equiv (p' \vee q') \vee (p \vee q) && (De\ Morgan) \\
&\equiv p' \vee q' \vee p \vee q && (Birleşme) \\
&\equiv p' \vee p \vee q' \vee q && (Değişme) \\
&\equiv (p' \vee p) \vee (q' \vee q) && (Birleşme) \\
&\equiv 1 \vee 1 && (p' \vee p \equiv 1) \\
&\equiv 1 && (1 \vee 1 \equiv 1) \\
(p \wedge q)' \vee (p \vee q) &\equiv 1
\end{aligned}$$

olduğundan, bu bileşik önerme bir *totolojidir*.

Bu yöntemle *önermeler cebiri* ile çözüme yöntemi denilir.

### 2.2.5 İse İşlemi

$p$ : Bu üçgenin iki kenarı eşittir.

$q$ : Bu bir ikizkenar üçgendir.

önermelerini "ise" bağlacıyla birbirine bağladığımızda,

$p$  ise  $q$ : "Bu üçgenin iki kenarı eşitse, ikizkenar bir üçgendir." bileşik önermesini elde ederiz.

**Tanım:**  $p$  ile  $q$  birer önerme ise,  $p \Rightarrow q$  bileşik önermesi,

$$(1 \Rightarrow 1) \equiv 1, \quad (1 \Rightarrow 0) \equiv 0, \quad (0 \Rightarrow 1) \equiv 1, \quad (0 \Rightarrow 0) \equiv 1 \quad (2.4)$$

*kurallarıyla tanımlanır ve "p ise q" diye okunur.* Bu kurallar, aşağıdaki simgelerle de gösterilebilir:

$$(D \Rightarrow D) \equiv D, \quad (D \Rightarrow Y) \equiv Y, \quad (Y \Rightarrow D) \equiv D, \quad (Y \Rightarrow Y) \equiv D \quad (2.5)$$

$p$  ile  $q$  önermeleri,  $p \Rightarrow q$  bileşik önermesinin *bileşenleri*'dir.

$p \Rightarrow q$  önermesine *koşullu önerme*, *gerekirme* adları da verilir ve  $p$  *gerekirir*  $q$  diye de okunur. Bu koşullu önermede,  $p$  ye *öncül* (*varsayım*, *hipotez*);  $q$  ya ise *sonuç* (*vargı*, *hüküm*) denilir.

$p \Rightarrow q$  koşullu önermesinin *yanlış olması için*,  $q$  *vargısının yanlış olması gerekli ve yeterlidir*.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$p \Rightarrow q$  bileşik önermesinin doğruluk tablosu, yanda gösterilmiştir.

### Örnekler

1. *Doğru önerme, doğru önermeyi gerektirir:*

$p$  : Fiyatlar ve ücretler yükseliyor.

$q$  : Enflasyon artıyor.

önergeleri için,

$p \Rightarrow q$  : Fiyatlar ve ücretler yükseliyor ise, enflasyon artıyor.  
koşullu önermesini yazabiliriz.

2. *Doğru önerme, yanlış önermeyi gerektirmez:*

$p$  : Ankara'da hava soğuktur.  $q$  : Ankara kuzey kutbundadır.

önergelerinden oluşan,

$p \Rightarrow q$  : Ankara'da hava soğuk ise, Ankara kuzey kutbundadır.  
koşullu önermesi yanlıştır. O halde,  $p \not\Rightarrow q$  dur.

3. *Yanlış önerme, doğru önermeyi gerektirebilir:*

$p$  :  $(6 = 9) \equiv 0$ , ile  $q$  :  $(6 < 9) \equiv 1$  önergelerini düşünelim.  
 $6 \neq 9$  olması  $6 < 9$  olmasına engel değildir. O halde  $(6 = 9) \Rightarrow (6 < 9)$   
gerektirmesi var olabilir. Demek ki yanlış bir önermeden, doğru bir önerme  
çıkartılabilir.

4. *Yanlış önerme, yanlış bir önermeyi gerektirebilir:*

$p$  :  $(6 \neq 6) \equiv 0$ , ile  $q$  :  $(7 \neq 7) \equiv 0$  önergelerini düşünelim.  
 $6 \neq 6$  olması  $6 + 1 \neq 6 + 1$  olmasına engel değildir. O halde  $(6 \neq 6) \Rightarrow$   
 $(7 \neq 7)$  gerektirmesi var olabilir.

$p \Rightarrow q$  koşullu önermesinde,  $p$  önermesi *yeterli* koşul,  $q$  önermesi *gerekli*  
koşuldur.

$p \Rightarrow q$  koşullu önermesinde  $p$  önermesine *hipotez*,  $q$  önermesine *hüküm* denir.

$q \Rightarrow p$  koşullu önermesine,  $p \Rightarrow q$  önermesinin *karşıtı* denilir.

Bir koşullu önermenin karşıtı bazan doğru, bazan yanlış olabilir.

## Örnekler

1.  $p$  :  $x = 3$  ile  $q$  :  $x + 4 = 7$   
önergelerinden oluşturulan,

$$p \Rightarrow q : [(x = 3) \Rightarrow (x + 4 = 7)]$$

koşullu önermesinin karşıtı,

$$q \Rightarrow p : [(x + 4 = 7) \Rightarrow (x = 3)]$$

dür. O halde, bu örnekte, hem  $(p \Rightarrow q)$  koşullu önermesi, hem de  $(q \Rightarrow p)$   
karşıtı doğrudur.

2.  $p : x = -4$  ile  $q : x^2 = 16$   
önermelerinden oluşturulan,

$$p \Rightarrow q : [(x = -4) \Rightarrow (x^2 = 16)]$$

koşullu önermesinin karşıtı,

$$q \Rightarrow p : [(x^2 = 16) \Rightarrow (x = -4)]$$

dür. Ancak, her zaman  $(x^2 = 16) \Rightarrow (x = -4)$  olmaz.  $(x^2 = 16) \Rightarrow (x = +4)$  de olabilir. O halde, bu örnekte,  $(p \Rightarrow q)$  koşullu önermesinin doğruluğu,  $(q \Rightarrow p)$  karşıtının doğruluğunu gerektirmeyebilir.

3.  $p : \triangle ABC$  ikizkenar bir dik üçgendir.

$q : \triangle ABC$  dik üçgenin kenarları arasında  $a^2 + b^2 = c^2$  bağıntısı vardır.  
önermeleri için

$p \Rightarrow q : \triangle ABC$  ikizkenar bir dik üçgen ise,  $\triangle ABC$  dik üçgeninin kenarları arasında  $a^2 + b^2 = c^2$  bağıntısı vardır.

$q \Rightarrow p : \triangle ABC$  dik üçgenin kenarları arasında  $a^2 + b^2 = c^2$  bağıntısı var ise,  $\triangle ABC$  ikizkenar bir dik üçgendir.

olur. Ama, bu önerme her zaman doğru değildir.

**Tanım:**  $p \Rightarrow q$  koşullu önermesinin karşıt tersi,  $q' \Rightarrow p'$  önermesidir.

**Teorem:** Koşullu bir önerme karşıt tersine denktir:

$$p \Rightarrow q \quad \equiv \quad q' \Rightarrow p'$$

*İspat:* Aşağıdaki doğruluk tablosu isteneni verecektir.

$p$	$q$	$p'$	$q'$	$p \Rightarrow q$	$q' \Rightarrow p'$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1
				↑	↑

$$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$$

**Teorem:**  $p$  ile  $q$  iki önerme ise, aşağıdaki denklik sağlanır.

$$p \Rightarrow q \quad \equiv \quad p' \vee q$$

$p$	$q$	$p'$	$p \Rightarrow q$	$p' \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1
			↑	↑

*İspat:* Yandaki doğruluk tablosundan çıkar.

$$p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$$

### Örnekler

1.  $p$  :  $\triangle ABC$  üçgeni eşkenardır.  
 $q$  :  $\triangle ABC$  üçgeninin açuları eştir.  
 $p \Rightarrow q$  :  $\triangle ABC$  üçgeni eşkenar ise,  $\triangle ABC$  üçgeninin açuları eştir.  
 $q' \Rightarrow p'$  :  $\triangle ABC$  üçgeninin açuları eş değil ise,  $\triangle ABC$  üçgeni eşkenar değildir.
2.  $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$  denkleğini kullanarak,  $(p \Rightarrow q) \vee p \equiv 1$  olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} (p \Rightarrow q) \vee p &\equiv (p' \vee q) \vee p && (p \Rightarrow q \equiv p' \vee q) \\ &\equiv (q \vee p') \vee p && \vee \text{ nin Değişme Özeliği} \\ &\equiv q \vee (p' \vee p) && (\vee \text{ nin Birleşme Özeliği}) \\ &\equiv q \vee 1 && (p' \vee p \equiv 1) \\ &\equiv 1 && (q \vee 1 \equiv 1) \end{aligned}$$

### 2.2.6 Uygulamalar

1.  $p \Rightarrow q$  koşullu önermesi yanlış iken  $q \Rightarrow p$  önermesinin doğru ve yanlış olduğu durumlara örnekler veriniz.
2.  $p' \Rightarrow q'$  koşullu önermesine  $p \Rightarrow q$  koşullu önermesinin *tersi* denilir. Bunun doğruluk tablosunu düzenleyiniz.

$$p : x = 3 \text{ ile } q : x^2 = 9$$

önermelerinden oluşturulan

$$p \Rightarrow q : (x = 3 \Rightarrow x^2 = 9)$$

koşullu önermesinin tersini yazınız.

3.  $(p \Rightarrow q)' \wedge q$  bileşik önermesinin bir çelişki olduğunu gösteriniz.

### 2.2.7 Ancak ve Ancak İşlemi

**Tanım:**  $p$  ile  $q$  birer önerme ise,  $p \Leftrightarrow q$  bileşik önermesi,

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

*bağıntısıyla tanımlanır ve  $p$  ancak ve ancak  $q$  diye okunur.* Bu tanım,

$$(1 \Leftrightarrow 1) \equiv 1, \quad (1 \Leftrightarrow 0) \equiv 0, \quad (0 \Leftrightarrow 1) \equiv 0, \quad (0 \Leftrightarrow 0) \equiv 1$$

kurallarıyla da verilebilir. Neden?

$p$  ile  $q$  önermeleri,  $p \Leftrightarrow q$  bileşik önermesinin *bileşenleri*'dir.

$p \Leftrightarrow q$  önermesine *iki yönlü koşullu önerme*, *çift gerektirme* adları da verilir ve " $p$  çift gerektirir  $q$ " diye de okunur.

$p \Leftrightarrow q$  *iki yönlü koşullu önermesinin doğru olması için,  $p$  ile  $q$  bileşenlerinin aynı değerli olması gerekli ve yeterlidir.*

$p \Leftrightarrow q$  bileşik önermesinin doğruluk tablosu, aşağıda gösterilmiştir.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1
				↑	↑

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

### Örnekler

- $d, e$  iki doğru ve  $\parallel$  simgesi paralelliği göstereyin.

$$p : d \parallel e \qquad q : e \parallel d$$

önermelerinden ve paralellik özeliğinden,

$$p \Rightarrow q : d \parallel e \Rightarrow e \parallel d$$

$$q \Rightarrow p : e \parallel d \Rightarrow d \parallel e$$

$$p \Leftrightarrow q : d \parallel e \Leftrightarrow e \parallel d$$

çıkar. Öyleyse, bu örnek için,  $(p \Leftrightarrow q)$  iki yönlü koşullu önermesi doğrudur; yani, bir çift gerektirmedir. Bu sonucu,

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv 1$$

biçiminde göstereceğiz.

- 

$$p : \angle A = \angle B \qquad q : \angle A \text{ ile } \angle B \text{ yöndeştir.}$$

önermelerinden,

$$p \Rightarrow q : (\angle A = \angle B) \text{ ise, } \angle A \text{ ile } \angle B \text{ yöndeştir.}$$

$$q \Rightarrow p : (\angle A \text{ ile } \angle B \text{ yöndeş ise, } (\angle A = \angle B) \text{ dir.}$$

yazabiliriz. O halde,

$$p \Leftrightarrow q : (\angle A = \angle B) \text{ ancak ve ancak } \angle A \text{ ile } \angle B \text{ yöndeştir.}$$

olur.

Oysa, bütün eş açılar yöndeş olmak zorunda değildir; yöndeş olmadığı halde eş olan açılar da vardır. O halde,  $(p \Rightarrow q)$  önermesi yanlıştır; yani,



$[(p \Rightarrow q) \equiv 0]$  dır. Öte yandan, bütün yöndeş açılar eşit. Dolayısıyla,  $(q \Rightarrow p)$  koşullu önermesi doğrudur; yani,  $[(q \Rightarrow p) \equiv 1]$  dır.

Öyleyse, bu örnek için,  $(p \Leftrightarrow q)$  iki yönlü koşullu gerektirmesi yanlıştır; yani, bir çift gerektirme değildir. Bu sonucu,

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv 0, \quad \text{ya da } (p \Rightarrow q) \neq (q \Rightarrow p)$$

biçimlerinden birisiyle gösterebiliriz.

Buraya kadar elde ettiklerimizi özetlersek, aşağıdaki tabloyu düzenleyebiliriz.

### 2.2.8 Önermeler Cebirinin Kuralları

*Eşgüçlülük Kuralları:*

$$1a. \quad p \wedge p \equiv p$$

$$1b. \quad p \vee p \equiv p$$

*Birleşme Kuralları:*

$$2a. \quad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$2b. \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

*Yer Değişme Kuralları:*

$$3a. \quad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$3b. \quad p \vee q \equiv q \vee p$$

*Dağılma Kuralları:*

$$4a. \quad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$4b. \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

*Eşgüçlülük Kuralları:*

$$5a. \quad p \wedge 1 \equiv p$$

$$5b. \quad p \vee 1 \equiv 1$$

*Eşgüçlülük Kuralları:*

$$6a. \quad p \wedge 0 \equiv 0$$

$$6b. \quad p \vee 0 \equiv p$$

*Tümleme Kuralları:*

$$7a. \quad p \wedge p' \equiv 0$$

$$7b. \quad p \vee p' \equiv 1$$

*Tümleme Kuralları:*

$$8a. \quad (p')' \equiv p$$

$$8b. \quad 1' \equiv 0, \quad 0' \equiv 1$$

*De Morgan Kuralları:*

$$9a. \quad (p \wedge q)' \equiv (p' \vee q')$$

$$9b. \quad (p \vee q)' \equiv (p' \wedge q')$$

*Gerektirme Kuralları:*

$$10a. \quad [(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]]$$

$$10b. \quad (p \leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$$

*Geçişkenlik Kuralları:*

$$11a. \quad [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

$$11b. \quad (p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$$

*Karşıt Ters Önerme:*

$$12a. \quad (p \leftrightarrow q) \equiv (q' \leftrightarrow p')$$

### 2.2.9 Alıştırmalar

1.  $x = 5 \Leftrightarrow x^2 = 25$  önermesinin doğru olup olmadığını bulunuz.
2.  $p \equiv 1$  ise  $p \wedge (p \Rightarrow q)$  önermesi neye eşittir?
3. "Ateş olmayan yerden duman tütmez." atasözünü biraz değiştirerek, "Ateş yoksa, duman tütmez." biçimine sokalım. Bu bileşik önermenin bileşen-

lerini bulunuz ve harflerle ifade ediniz. Sonra, karşıt, ters ve ters karşıt önermelerini yazınız.

4. Aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk tablolarını yapınız.

- |                                    |                                       |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $(p \wedge q)' \vee r$          | b) $(p' \vee q) \wedge r$             |
| c) $(p' \vee q') \wedge r'$        | d) $(r \wedge q') \vee (p \wedge q')$ |
| e) $(q \vee r) \wedge (q' \vee p)$ | f) $(p \vee q') \wedge p$             |

5. Aşağıdaki bileşik önermeleri değilleyiniz.

- |   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| a) $(p \vee q') \wedge p$                     | b) $p \wedge (q \vee p')$             |
| c) $p' \wedge (q \vee r')$                    | d) $(p \wedge q) \vee (q \wedge r)$   |
| e) $p \wedge [(q \wedge r) \vee (p' \vee r)]$ | f) $(p \wedge q) \vee (p' \wedge r')$ |

6. Aşağıdaki denkliklerin geçerli olup olmadığını gösteriniz.

- |                                      |  |
|--------------------------------------|--|
| a) $0 \vee 0 \equiv 0$               | b) $0 \wedge 0 \equiv 0$                       |
| c) $1 \vee 1 \equiv 1$               | d) $1 \wedge 1 \equiv 1$                       |
| e) $p \vee 0 \equiv p$               | f) $p \wedge 0 \equiv 0$                       |
| g) $p \vee 1 \equiv 1$               | h) $p \wedge 1 \equiv p$                       |
| i) $(p' \wedge q)' \equiv p \vee q'$ | j) $p \wedge [(p' \wedge q)' \vee q] \equiv p$ |

7. Aşağıdaki denklikleri gösteriniz.

- a)  $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q)] \equiv (p \vee r) \Rightarrow q$   
b)  $[p \Rightarrow q] \vee [p \Rightarrow r] \equiv p \Rightarrow (q \vee r)$   
c)  $(p \vee q) \equiv (p' \Rightarrow q)$

8. Aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

- |   |   |
|---|---|
| a) $[(1 \vee 0) \wedge (0 \wedge 1)'] \vee (0' \vee 1)$             | b) $[(1' \wedge 0)' \wedge (1 \vee 0)] \wedge [(0' \vee 0) \vee 1]$     |
| c) $[1 \wedge (0 \vee 1)]' \vee [(0' \vee 1) \wedge (1 \wedge 0)']$ | d) $(1 \vee 0) \wedge [(0 \vee 1) \vee (1 \wedge 1)] \wedge (1 \vee 1)$ |

9. Aşağıdaki denklikler doğru mudur?

- |  |   |
|--|---|
| a) $(p \wedge q) \vee (p' \vee q)' \equiv p$ | b) $p \wedge (p' \vee q) \equiv p \wedge q$               |
| c) $p \wedge (q \vee q') \equiv p$           | d) $(p' \vee q)' \vee q \equiv p \vee q$                  |
| e) $(p' \vee q) \wedge (p \vee q) \equiv q$  | f) $[p \wedge (q' \vee r)]' \equiv p' \vee (q \wedge r')$ |

10. Aşağıdaki bileşik önermeler, birer totoloji midir? Neden?

- a)  $[(p \wedge q')' \wedge p] \vee (q \wedge p)'$   
b)  $[(p \vee q) \wedge (p \vee q')] \vee p'$   
c)  $[(p \vee s) \vee (p' \wedge q)] \wedge (p \vee q')$

11. Aşağıdaki bileşik önermeler, birer çelişki midir? Neden?

- a)  $[(p \vee q) \wedge (p \vee q')] \wedge p'$
- b)  $[(p \wedge q')' \wedge p] \wedge (p \wedge q)'$

12.  $(p' \vee q) \vee r' \equiv 0$  olduğuna göre  $(p' \vee q) \wedge [(r' \vee p) \wedge r]$  bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

13.  $(p \vee r)' \wedge q \equiv 1$  olduğuna göre  $[(p \vee r')' \vee q]' \wedge (q' \wedge r)$  bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

14.  $p$  : "*Bardak yere düşer.*" ve  $q$  : "*Bardak kırılır.*" önermeleri için

$$p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow p, \quad p' \Rightarrow q' \quad q' \Rightarrow p'$$

önermelerini sözle ifade ediniz.

15. "*Aynı doğruya dik olan iki doğru birbirine paraleldir.*" bileşik önermesini, bileşenlerine ayırarak, simgelerle ifade ediniz.

16. "*Yöndeş açılar birbirine eştir.*" bileşik önermesini, bileşenlerine ayırarak, simgelerle ifade ediniz.

17.  $p : x = 7$ ,  $q : x^2 = 49$  önermeleri veriliyor.

a)  $p \Rightarrow q$  ve  $p \Leftrightarrow q$  önermelerini yazınız ve her birinin doğruluk değerlerini bulunuz.

b)  $p \Rightarrow q$  teoremini doğrudan ve olmayana ergi yöntemleri ile ayrı ayrı ispatlayınız.

c)  $p \Leftrightarrow q$  nun bir çift gerektirme olup olmadığını nedenleri ile açıklayınız.

18.  $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$  denkleğini kullanarak,  $p \Rightarrow q$  bileşik önermesini değilleyiniz.

19.  $p \Leftrightarrow q$  bileşik önermesinin deęilini bulunuz.

20. "*Bir dörtgenin kare olması için, kenarlarının birbirlerine eş olması gerekir.*" bileşik önermesini, bileşenlerine ayırarak, simgelerle ifade ediniz. Önermenin tersini, karşıtını ve karşıt tersini bularak doğruluk değerlerini belirtiniz.

21. "*Kenarlarının birbirlerine eş ve açılarının birbirlerine eş olması bir dörtgenin kare olması için yeterlidir.*" bileşik önermesini, bileşenlerine ayırarak, simgelerle ifade ediniz. Önermenin tersini, karşıtını ve karşıt tersini bularak doğruluk değerlerini belirtiniz.

22. "*Bir dörtgenin kare olması için, kenarlarının birbirlerine eş ve açılarının birbirlerine eş olması gerekli ve yeterlidir.*" bileşik önermesini, bileşenlerine ayırarak, simgelerle ifade ediniz.

23. "*2 den farklı her asal sayı tektir.*" bileşik önermesini, bileşenlerine ayırarak, simgelerle ifade ediniz. Önermenin tersini, karşıtını ve karşıt tersini bularak doğruluk değerlerini belirtiniz.

24. "*Yalancının mumu yatsıya kadar yanar.*" atasözünü "*Yalancıysa, mumu yatsıya kadar yanar.*" bileşik önermesi biçimine getirip, bileşenlerine ayırınız. Önermenin tersini, karşıtını ve karşıt tersini bularak doğruluk değerlerini belirtiniz.

25. Aşağıdaki bileşik önermeleri değilleyiniz.

- |   |   |
|---|---|
| a) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$            | b) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)$ |
| c) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge q] \Rightarrow q$ | d) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$     |
| e) $p \wedge (q \Leftrightarrow r)$                 | f) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$            |
| g) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$            | h) $(p \Rightarrow q) \wedge r$                     |

26. Aşağıdaki önermelerin doğruluk tablolarını düzenleyiniz.

- |  |   |
|--|---|
| a) $p \vee (q \Rightarrow p)$                                | b) $(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$ |
| c) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge q] \Rightarrow (p \vee q)$ | d) $(p \Leftrightarrow q) \vee r$   |
| e) $[p' \wedge (p \Rightarrow q)'] \vee (p \Rightarrow q)$   | f) $(p \Rightarrow q) \wedge r$   |
| g) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$                     | h) $(p' \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)' \equiv p \wedge q'$              |
| i) $(p \wedge q') \Rightarrow (r \vee q)$                    | j) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q \equiv 1$                                   |
| k) $[p \wedge (q' \Rightarrow r')]'$                         |   |

27. Aşağıdaki önermelerden hangileri doğrudur?

- |  |  |
|--|--|
| a) $(p' \vee q')' \vee (p \wedge q') \equiv p$                   | b) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q') \equiv q'$                                |
| c) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q) \equiv q$                | d) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)]$ |
| e) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow p \equiv p' \vee q$ | f) $f)[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p'$                                 |
| g) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge q] \Rightarrow (p \wedge q)$   | h) $(p' \Rightarrow q) \vee r \equiv 0$  |
| i) $p \vee (p' \wedge q) \equiv (p \vee q)$                      |  |

28. Aşağıdaki önermelerin doğruluk tablolarını düzenleyiniz.

- |  |  |
|--|--|
| a) $[(p \Rightarrow (q \Rightarrow r))] \equiv [(p \wedge q) \Rightarrow r]$ | b) $(p \wedge q') \Rightarrow (p \wedge r)' \equiv 0$              |
| c) $[(p' \Leftrightarrow q) \Rightarrow r] \vee (p \vee r)$                  | d) $p \vee (q \Rightarrow r) \equiv 0$                             |
| e) $[(p' \Rightarrow (r \vee q)) \Leftrightarrow (p \vee r)]$                | f) $r \wedge (q' \Rightarrow p)' \equiv 1$                         |
| g) $[p \wedge (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p' \vee r) \wedge q']$    | h) $(p' \Rightarrow q) \Rightarrow (p' \Rightarrow q')' \equiv p'$ |