SOYUT MATEMATİK

DERS NOTLARI

Yrd. Doç. Dr. Hüseyin BİLGİÇ

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen–Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü

Eylül 2009

İçindekiler

Bölüm 1

Önermeler ve İspat Yöntemleri

Tanım 1.1 Doğru veya yanlış ama bunlardan sadece bir tanesi olabilen ifadelere ***önerme*** denir. Önermeler $p, q, r, \ldots$ gibi harflerle gösterilir.

Örnek 1.2 Aşağıdaki ifadelerin önerme olup olmadığını bulalım:

(a) 2 asal sayıdır.

(b) Her n doğal sayısı için $2^n + 1$ asaldır. (**Dikkat:** 0 doğal sayıdır)

(c) Düzlemde bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 derecedir.

(d) 4'den büyük her çift sayı iki asal sayının toplamıdır. (Goldbach, 1742)

(e) Yarın pikniğe gidelim.

Çözüm: Burada **(a)** ve **(c)** doğru birer önermedir. $n = 3$ için $2^n + 1 = 9$ asal olmadığından **(b)** yanlış bir önermedir. **(d)** ifadesi 1742'de Rus matematikçi Christian Goldbach tarafından ortaya atılmış bir iddiadır ve henüz doğru olup olmadığı ispatlanamamıştır. Ya doğru ya yanlış olacağından bir önermedir. **(e)** cümlesi kesin bir hüküm bildirmediğinden bir önerme değildir.

Not: Bir tahtada yazan "Bu tahtadaki her cümle yanlıştır" cümlesinin doğru olması da yanlış olması da çelişkiye yol açacağından bu cümle bir önerme değildir. Benzer şekilde bir Romalının söyleyeceği "Bütün Romalılar yalancıdır" cümlesi de önerme olamaz.

Tanım 1.3 İfadesinde değişkenler bulunan ve bu değişkenlerin alacağı değerlere göre doğru veya yanlış (ama bunlardan sadece bir tanesi) olabilen ifadelere ***açık önerme*** denir. Açık önermeler değişken sayısına göre $p(x), p(x, y), p(x, y, z), \ldots$ gibi gösterilir.

Örnek 1.4 x bir reel sayıyı göstermek üzere, $p(x)$ açık önermesi "$x^2 + x = 0$" olsun. $x = 0$ ve $x = -1$ için önerme doğrudur. Yani $p(0)$ ve $p(-1)$ doğrudur. Aksi halde önerme yanlıştır.

Birleşik Önermeler

Tanım 1.5 p ve q iki önerme olsun. "p ve q" önermesi bu önermelerden her ikisi de doğru iken doğru; aksi halde yanlış olan önermedir. Buna iki önermenin ***kesişimi*** de denir ve $p \wedge q$ ile gösterilir. "p veya q" önermesi de bu önermelerden en az birisi doğru iken doğru; aksi halde yanlış olan önermedir. Buna iki önermenin ***birleşimi*** de denir ve $p \vee q$ ile gösterilir. (**Dikkat:** "veya" kelimesinin Türkçe'deki kullanılışı farklı olabilir.)

Önermelerin ve bunlara karşılık gelen birleşik önermelerin alacağı değerleri bir tablo halinde gösterelim. Burada doğru için 1 sembolü veya D harfi; yanlış için ise 0 sembolü veya Y harfi yazılır. Bu tablolara "doğruluk tablosu" denir.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
D	D	D	D
D	Y	Y	D
Y	D	Y	D
Y	0	Y	Y

veya

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Tablo 1.1: $p \wedge q$ ile $p \vee q$ önermelerinin doğruluk tablosu.

Tanım 1.6 Bir p önermesi doğru iken yanlış; yanlış iken doğru olan önermeye p'nin ***değili*** veya ***olumsuzu*** denir ve $p', \sim p, \neg p, \overline{p}$ sembollerinde birisi ile gösterilir.

p	$\sim p$
1	0
0	1

Örnek 1.7 p:"Bir gün 24 saattir" önermesinin değili $\sim p$:"Bir gün 24 saat değildir" önermesidir. $q(x)$: $x^2 < 7$ önermesinin değili $\sim q(x) : x^2 \geqslant 7$ dir.

Tanım 1.8 Doğruluk değeri her zaman aynı olan p ve q önermelerine ***eşdeğer*** veya ***denk*** önermeler denir ve $p \equiv q$ yazılır. $p(x)$ ve $q(x)$ açık önermelerinin denk olması her x için $p(x)$ ve $q(x)$ önermelerinin aynı olmasıdır.

Örnek 1.9 p :"Her doğal sayı tektir" önermesi ile q:"63 asaldır" önermeleri denktir. Ayrıca şağıdaki üç açık önerme de denktir: (x reel sayıyı göstermektedir)

$$r(x) : \text{“}x^2 < 25\text{”}, \qquad s(x) : \text{“}x < 5 \text{ ve } -5 < x\text{”}, \qquad t(x) : |x| < 5$$

Örnek 1.10 Aşağıdaki özelliklere De Morgan Kuralları denir:

$$\boxed{(p \wedge q)' \equiv (p' \vee q')} \qquad \text{ve} \qquad \boxed{(p \vee q)' \equiv (p' \wedge q')}$$

Bu özelliklerin doğru olduğunu tablo ile gösterin: (boşlukları doldurun)

p	q	p'	q'	$p \wedge q$	$p' \vee q'$	$p \vee q$	$p' \wedge q'$
1	1	0	0				
1	0	0	1				
0	1	1	0				
0	0	1	1				

Tanım 1.11 "p ise q" önermesi p doğru ve q yanlış iken yanlış; aksi halde doğru olan önermedir. Buna ***koşullu*** önerme denir ve $p \Longrightarrow q$ ile gösterilir. p'ye ***hipotez*** q'ya da ***sonuç*** önermesi denir. $p \Longrightarrow q$ önermesi "p, q'yu gerektirir" şeklinde de okunur.

p	q	$p \Longrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Örnek 1.12 "$2 < 1$ ise $2 < 3$ tür" önermesi doğrudur, çünkü $(0 \Longrightarrow 1) \equiv 1$. Şimdi

p:"Yağmur yağıyor", $\qquad$ p:"Bahçe ısnalıyor"

önermelerini düşünelim. Yağmur yağdığında her zaman bahçenin ıslandığı bilindiğine göre $p \Longrightarrow q$ önermesi doğrudur. (Yağmur yağmadığında zaten p yanlış olduğundan $p \Longrightarrow q$ doğrudur.) Ancak $q \Longrightarrow p$ doğru değildir. (Neden?)

Not: $p \Longrightarrow q$ önermesinde

"p önermesi q önermesi için yeter koşuldur"
"q önermesi p önermesi için gerek koşuldur"

denir.

Örnek 1.13 $(p \Longrightarrow q) \equiv (q' \Longrightarrow p') \equiv (p' \vee q)$ olduğunu gösterelim.

p	q	p'	q'	$p \Longrightarrow q$	$q' \Longrightarrow p'$	$p' \vee q$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Buna göre aşağıdaki üç önermenin birbirine denk olduğunu (aslında doğru olduğunu) söyleyebiliriz:

(a) Yağmur yağıyor $\Longrightarrow$ bahçe ıslanıyor.

(b) Bahçe ıslanmıyor $\Longrightarrow$ yağmur yağmıyor

(c) Yağmur yağmıyor veya bahçe ıslanıyor.

Tanım 1.14 $p \Longrightarrow q$ ve $q \Longrightarrow p$ önermeleri aynı anda doğru iken doğru, aksi halde yanlış olan önermeye ***iki yönlü koşullu önerme*** denir ve $p \iff q$ şeklinde yazılır. "p ancak ve ancak q" şeklinde veya "p için gerek ve yeter şart q dur" şekline okunur. Doğruluk tablosu şu şekildedir.

p	q	$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow p$	$p \iff q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Tablodan da anlaşılacağı gibi aslında $(p \iff q) \equiv (p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$. Ayrıca şunu da diyebiliriz:

"$p \iff q$ önermesi, p ile q denk iken doğru; aksi halde yanlış olan önermedir."

Örnek 1.15 "Bir asal sayı çifttir ancak ve ancak 2 dir" önermesini ele alalım. p :" n sayısı çifttir" ve q : "$n = 2$" diyelim. $p \Longrightarrow q$ nun ve $q \Longrightarrow p$ nin doğru olduğu açıktır. O halde $p \iff q$ doğrudur.

Örnek 1.16 x bir reel sayıyı göstermek üzere her x için $|x| = 1 \iff x^3 = x$ önermesi doğru mudur?

Çözüm: $|x| = 1 \Longrightarrow x = 1$ veya $x = -1$ olup $x^3 = x$ doğru olur. Ancak $x = 0$ için $x^3 = x$ olur fakat $|x| \neq 1$ dir. O halde $|x| = 1 \iff x^3 = x$ önermesi yanlıştır. Ama, $|x| = 1 \iff x^2 = 1$ önermesi doğrudur.

Niceleyiciler

Önermelerdeki "bütün", "her", "en az bir", "bazı", "hiçbir" gibi kelimelere ***niceleyici*** denir. Mesela, "bütün öğrenciler bayandır", "sıfırdan büyük en az bir tamsayı vardır" önermelerinde olduğu gibi. Şimdi, bir $p(x)$ açık önermesi verilsin.

"Bütün x ler için $p(x)$ doğrudur" yerine kısaca $\forall\, x, p(x)$

"En az bir x için $p(x)$ doğrudur" yerine kısaca $\exists\, x, p(x)$

yazacağız. Burada $\forall$ ve $\exists$ niceleyicilerine sırasıyla ***evrensel*** ve ***varlıksal niceleyici*** denir.

Örnek 1.17 "$\forall\, x$ tamsayısı için $|x| = x$" önermesi yanlıştır. Çünkü $x = -2$ için $|-2| \neq 2$ dir.

Örnek 1.18 "$\forall\, x$ reel sayısı için $x^2 - x + 2 \neq 0$" önermesi doğrudur. Çünkü $x^2 - x + 2 = 0$ denkleminin diskriminantı $\Delta = b^2 - 4ac = -7 < 0$ olup bu denklemin reel kökü yoktur.

Örnek 1.19 "$\exists\, x$ reel sayısı için $x^2 = x$" önermesi doğrudur. Çünkü $x = 0$ için $0^2 = 0$ dır.

Örnek 1.20 "$\exists\, n$ doğal sayısı için $3(n + 2)$ asaldır" önermesi yanlıştır. Çünkü $3(n + 2)$ sayısı 3'den büyük ve 3'ün bir tam katı olup asal olamaz.

Not: $\exists$ ve $\forall$ niceleyicileri ile başlayan önermelerin olumsuzları şöyledir:

$$\boxed{\sim(\exists, p(x)) \equiv \forall\, x, \sim p(x)} \qquad \text{ve} \qquad \boxed{\sim(\forall, p(x)) \equiv \exists\, x, \sim p(x)}$$

Örnek 1.21

$$\sim (\forall x, x + 3 < 10) \equiv (\exists x, x + 3 \geqslant 10)$$
$$\sim (\exists x, x + 3 = 7) \equiv (\forall x, x + 3 \neq 7)$$

Teorem ve İspat Yöntemleri

Tanım 1.22 Doğru olduğu ispatlanmış önermelere ***teorem*** denir. Teoremler genelde $p \Longrightarrow q$ şeklinde verilir. Böyle bir teoremin ispatını yapmak için p doğru iken q nun doğru olduğu gösterilmelidir. (Bu yüzden p'ye hipotez, q'ya da sonuç denmektedir.) Bazen teoremler $p \iff q$ şeklinde verilir. Bu durumda $p \Longrightarrow q$ ile $q \Longrightarrow p$ önermeleri ayrı ayrı ispatlanmalıdır.

Şimdi temel ispat yöntemlerini görelim:

A) Doğruluk Çizelgesi Yöntemi

Bu yöntemle bir teoremin her zaman doğru olduğu tablo ile gösterilir.

Örnek 1.23 $p \Longrightarrow q$ ve $r' \Longrightarrow q'$ önermeleri doğru ise $r' \Longrightarrow p'$ önermesinin doğru olduğunu gösterin.

Çözüm: Burada hipotez (H) ve sonuç (S) önermeleri şöyle seçilir:

$$H : (p \Longrightarrow q) \wedge (r' \Longrightarrow q') \qquad\qquad S : r' \Longrightarrow p'$$

Daha sonra $H \Longrightarrow S$ teoreminin her zaman doğru olduğu gösterilir.

p	q	r	p'	q'	r'	$p \Longrightarrow q$	$r' \Longrightarrow q'$	H	$S : r' \Longrightarrow p'$	$H \Longrightarrow S$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Soru: $p \Longrightarrow q$ ve $q \Longrightarrow r$ önermeleri doğru iken $p \Longrightarrow r$ önermesinin de doğru olduğunu gösterin.

B) Doğrudan İspat Yöntemi

Bu yöntemde, $p \Longrightarrow q$ önermesini ispatlamak için daha önceden doğru olduğu bilinen

$$p \Longrightarrow r_1, r_1 \Longrightarrow r_2, r_2 \Longrightarrow r_3, \ldots, r_{n-1} \Longrightarrow r_n, r_n \Longrightarrow q$$

önermeler zincirinden faydalanılır.

Örnek 1.24 "Bir tek doğal sayının karesi tektir" teoremini ispatlayalım. p : "n tektir" ve q : "n^2 tektir" diyelim. Şimdi

$$\begin{aligned} n \text{ tek } &\Longrightarrow \exists k \text{ tamsayısı için } n = 2k+1 \\ &\Longrightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &\Longrightarrow n^2 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{m}) + 1 = 2m + 1 \\ &\Longrightarrow n^2 \text{ tektir, çünkü } m \text{ tamsayı} \end{aligned}$$

C) Dolaylı İspat Yöntemi

$p \Longrightarrow q$ önermesi yerine onun dengi olan $q' \Longrightarrow p'$ önermesi ispatlanır. Bu önermeye $p \Longrightarrow q$ nun ***karşıt tersi*** denir.

Örnek 1.25 a ve b iki doğal sayı olsun. $a \cdot b$ bir çift sayı ise a ile b den en az birisinin çift olduğunu gösterelim. p önermesi "$a \cdot b$ çift" ve q önermesi de "a çift veya b çift" olsun. Biz $p \Longrightarrow q$ yerine $q' \Longrightarrow p'$

önermesini ispatlayalım. q' :"a ve b tek", p' :"$a \cdot b$ tek" olur.

$$\begin{aligned} a \text{ ve } b \text{ tek } &\Longrightarrow a = 2n+1, b = 2m+1 \text{ şeklindedir } (n, m \text{ tamsayı }) \\ &\Longrightarrow ab = 4nm + 2n + 2m = 2(\underbrace{2nm + n + m}_{k}) + 1 \\ &\Longrightarrow ab \text{ tektir, çünkü } k \text{ bir tamsayı} \end{aligned}$$

Soru: $3x + 2 \neq 5$ ise $2x + 3 \neq 5$ olduğunu gösterin.

D) Olmayan Ergi Yöntemi

$p \Longrightarrow q$ teoremini ispatlamak için p nin doğru olduğu kabul edilir. Daha sonra q nun yanlış olduğu kabul edilip bir çelişki bulunur. (Genelde p nin doğru olmasıyla çelişen bir durum bulunur.) Böylece q nun doğru olduğu sonucuna varılır.

Örnek 1.26 x, y birer tamsayı olsun. $x \cdot y$ tek ise x ile y den her ikisinin de tek olduğunu ispatlayalım. (Bu ispat dolaylı ispat yöntemi ile de yapılabilir.)

Çözüm: $x \cdot y$ tek olsun. x, y nin her ikisinin de tek olduğunu göstereceğiz. Aksini kabul edelim; yani x, y den en az biri çift olsun. Mesela x çift olsun. (y nin çift olduğunu kabul edilirse aynı ispat yapılır) O halde bir k tamsayısı için $x = 2k$ dır. Şimdi $x \cdot y = (2k)y = 2(ky)$ olup $x \cdot y$ nin çift olduğu görülür. Bu durum bir çelişkidir; çünkü $x \cdot y$ tek kabul edilmişti. O halde x, y nin her ikisi de tektir.

Not: a, b birer tamsayı olmak üzere eğer $ax = b$ olacak şekilde en az bir x tamsayısı mevcutsa $a \big| b$ yazıp "a, b yi böler" şeklinde okuyacağız. Bu tanıma göre $0 \big| 0$ önermesi doğrudur. **Dikkat:** a/b veya $\frac{a}{b}$ ifadesi bir önerme değildir.

Örnek 1.27 a bir tamsayı olmak üzere $6 \big| a \Longrightarrow 2 \big| a$ olduğunu olmayana ergi yöntemi ile gösterin.

Çözüm: $6 \big| a$ olsun. O halde bir k tamsayısı için $a = 6k$ dır. Şimdi $2 \not| a$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda a tektir. Ancak $a = 6k = 2(3k)$ olduğundan a çifttir. Bu bir çelişkidir. O halde $2 \big| a$ olmalıdır.

Not: Her zaman doğru olduğu iddia edilen bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için bir ters örnek (yanlış örnek) verilir. Yani $p \Longrightarrow q$ önermesinde p yi doğru fakat q yu yanlış yapan bir örnek aranır.

Örnek 1.28 a, b, c, d tamsayılar olsun. $ab \big| cd \Longrightarrow a \big| c$ veya $b \big| d$ önermesi doğru mudur?

Çözüm: Bu önerme her a, b, c, d için verilmiştir. Önerme doğru değildir; mesela $a = 6, b = 5, c = 10, d = 10$ alınırsa, $30 \big| 90$ dır fakat $6 \not| 10$ ve $5 \not| 9$ dur.

Not: $\forall x, p(x)$ önermesinin yanlış olduğunu göstermek için $\exists x, \sim p(x)$ önermesinin doğru olduğu ispatlanır. $\exists x, p(x)$ önermesinin yanlış olduğunu göstermek için $\forall x, \sim p(x)$ önermesinin doğru olduğu ispatlanır.

Örnek 1.29 $\exists x$ reel sayısı için $x^2 < 0$ önermesi yanlıştır; çünkü $\forall x$ reel sayısı için $x^2 \geqslant 0$ dır.

Soru: Çalışmazsam uyuyacağım, üzülürsem uyumayacağım. O halde üzülürsem çalışacağım. İspatlayın.

Örnek 1.30 $2^m - 1$ bir asal sayı ise m nin de asal olduğunu gösterin.

Çözüm: Dolaylı ispat yöntemini kullanalım. m asal olmasın. O halde $n > 1, k > 1$ olmak üzere $m = nk$ şeklindedir. Şimdi

$$2^m - 1 = (2^n)^k - 1 = (\underbrace{2^n - 1}_{A})(\underbrace{2^{n(k-1)} + 2^{n(k-2)} + \cdots + 2^n + 1}_{B})$$

Şimdi $n \geqslant 1$ olduğundan $A > 1$ dir. Ayrıca $k > 1$ olduğundan $B > 1$ dir. Bu durumda $2^m - 1$ in asal olmadığı görülür. $\square$

Örnek 1.31 $\sqrt{2}$ reel sayısının irrasyonel olduğunu gösterelim. $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olduğunu kabul edelim. O halde a, b ve $b \neq 0$ tamsayıları için

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

şeklindedir. Burada a ile b nin (1 den büyük) ortak çarpanı olmadığını kabul edebiliriz. Şimdi

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Longrightarrow 2b^2 = a^2 \Longrightarrow a^2 \text{ çift } \Longrightarrow a \text{ çift}$$

olur. $a = 2k$ dersek

$$2b^2 = a^2 \Longrightarrow 2b^2 = 4k^2 \Longrightarrow b^2 = 2k^2 \Longrightarrow b^2 \text{ çift } \Longrightarrow b \text{ çift}$$

olur. Yani a ile b nin 1 den büyük ortak çarpanı (yani 2) olur. Bu bir çelişkidir. O halde $\sqrt{2}$ rasyonel değildir. $\square$

Not: Bir önceki örnekte aşağıdaki önermeye olmayan ergi yöntemi uygulanmıştır:

$$a, b \text{ aralarında asal iki tamsayı} \Longrightarrow \frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$$

Soru: $\sqrt{3}$ ve $\sqrt{6}$ sayılarının irrasyonel olduğunu gösterin. (**İpucu:** p bir asal sayı ve $p \big| ab \Longrightarrow p \big| a$ veya $p \big| b$ dir.)

ALIŞTIRMALAR

1.) $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$ olduğunu gösterin.

2.) $[p' \Rightarrow (q \Rightarrow r')] \equiv [(q \wedge r) \Rightarrow p]$ olduğunu gösterin.

3.) $(p \Longleftrightarrow q) \Longrightarrow [(p \wedge r) \Longleftrightarrow (q \wedge r)]$ önermesinin doğruluk tablosunu yapınız.

4.) "3 sayısı a'yı bölmüyor ise 18 sayısı da a'yı bölmez" önermesinin doğru olduğunu ispat yöntemlerinden birini kullanarak gösterin.

5.) $[(p \Longrightarrow q) \wedge (p \Longrightarrow r)] \equiv [p \Longrightarrow (q \wedge r)]$ olduğunu tablo yapmadan gösterin.

6.) $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow r$ önermesinin doğruluk tablosunda kaç tane 0 vardır?

$\bigcirc$ yoktur $\bigcirc$ 2 tane $\otimes$ 3 tane $\bigcirc$ 4 tane $\bigcirc$ Hiçbiri

7.) p : "$\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + 1 = -x$" olsun ve q : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^4 > x^2$" olsun. Buna göre:

$\bigcirc$ $p = 1, q = 1$ $\otimes$ $p = 0, q = 0$ $\bigcirc$ $p = 1, q = 0$ $\bigcirc$ $p = 0, q = 1$ $\bigcirc$ Bir şey söylenemez

8.) $(p \Longrightarrow q)'$ önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?

$\otimes$ $p \wedge q'$ $\bigcirc$ $p' \wedge q$ $\bigcirc$ $p \vee q'$ $\bigcirc$ $p' \vee q$ $\bigcirc$ Hiçbiri

9.) p : "$\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 = -x$" olsun ve q : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$" olsun. Buna göre:

$\bigcirc$ $p = 1, q = 1$ $\bigcirc$ $p = 0, q = 0$ $\otimes$ $p = 1, q = 0$ $\bigcirc$ $p = 0, q = 1$ $\bigcirc$ Bir şey söylenemez

10.) $(p \wedge (p \Longrightarrow q)) \Longrightarrow q$ önermesinin doğruluk tablosunda bu önermenin sütununda kaç tane 0 vardır?

$\otimes$ yoktur $\bigcirc$ 2 tane $\bigcirc$ 3 tane $\bigcirc$ 4 tane $\bigcirc$ Hiçbiri

11.) $(p \Longrightarrow q) \equiv (\sim q \Longrightarrow \sim p)$ ilkesini temel alan ispat yönteminin adı nedir?

$\bigcirc$ Doğrudan ispat $\otimes$ Dolaylı ispat $\bigcirc$ Olmayana Ergi $\bigcirc$ Çelişki bulma $\bigcirc$ Hiçbiri

12.) Aşağıdaki önermelerden hangisi yanlıştır?

$\bigcirc$ $\forall x \in \mathbb{Z}, x \leqslant x^4$ $\bigcirc$ $\exists x \in \mathbb{N}, x + 6 = x^3$ $\otimes$ $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^2 \neq 6x$ $\bigcirc$ $\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = x^2$ $\bigcirc$ H.B

13.) $p \Longrightarrow q$ önermesinin olumsuzu aşağıdakilerden hangisidir?

$\otimes$ $p \wedge q'$ $\bigcirc$ $p' \wedge q$ $\bigcirc$ $p \vee q'$ $\bigcirc$ $p' \vee q$ $\bigcirc$ Hiçbiri

14.) $(p' \Longrightarrow q')'$ aşağıdakilerden hangisidir?

$\otimes$ $p' \wedge q$ $\bigcirc$ $p' \vee q$ $\bigcirc$ $p \wedge q'$ $\bigcirc$ $p \vee q'$ $\bigcirc$ Hiçbiri

15.) Aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

$\bigcirc$ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 1$ $\bigcirc$ $\exists n \in \mathbb{N}, 4n$ asaldır $\otimes$ $\forall x \in \mathbb{Z}, x(x+3) > -3$ $\bigcirc$ $\forall x \in \mathbb{Q}, 8x \in \mathbb{Z}$ $\bigcirc$ H.B

16.) $(p \wedge q) \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$ önermesinin doğruluk tablosunda bu önermenin sütununda kaç tane 0 vardır?

$\bigcirc$ 1 tane $\bigcirc$ 3 tane $\bigcirc$ 4 tane $\otimes$ yoktur $\bigcirc$ Hiçbiri

17.) $(p \Longrightarrow q')'$ aşağıdakilerden hangisidir?

$\bigcirc$ $p' \wedge q$ $\bigcirc$ $p \vee q$ $\otimes$ $p \wedge q$ $\bigcirc$ $p \vee q'$ $\bigcirc$ Hiçbiri

18.) Aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

$\bigcirc$ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2$ asaldır $\bigcirc$ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 3 < -3$ $\otimes$ $\forall x \in \mathbb{Z}, x(x+4) \geqslant -5$ $\bigcirc$ $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 \in \mathbb{Z}$ $\bigcirc$ H.B

19.) $(p \wedge q) \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$ önermesinin doğruluk tablosunda bu önermenin sütununda kaç tane 1 vardır?

$\otimes$ 4 tane $\bigcirc$ 1 tane $\bigcirc$ 3 tane $\bigcirc$ yoktur $\bigcirc$ Hiçbiri

20.) $(p \wedge q)' \Longleftrightarrow (p' \vee q')$ önermesi aşağıdakilerden hangisine denktir?

$\bigcirc$ $p \wedge q$ $\bigcirc$ $p \vee q'$ $\otimes$ $p \vee p'$ $\bigcirc$ $p \wedge p'$ $\bigcirc$ Hiçbiri

21.) Aşağıdaki önermelerden hangisi yanlıştır?

$\otimes$ $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 \in \mathbb{Q}$ $\bigcirc$ $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, x^3 \in \mathbb{Z}$ $\bigcirc$ $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 \in \mathbb{N}$ $\bigcirc$ $\exists x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x^2+40}$ asaldır. $\bigcirc$ Hiçbiri

22.) p : "7 asal ise $\sqrt{2}$ rasyonel sayıdır", q : "$\sqrt{6} \in \mathbb{N} \iff 1$ asaldır" olsun. Buna göre:

$\bigcirc$ p, q : Doğru $\bigcirc$ p : Doğru, q : Yanlış $\otimes$ p : Yanlış, q : Doğru $\bigcirc$ p, q : Yanlış $\bigcirc$ Hiçbiri

23.) Kuşlar ötüyor ise güneş doğuyor. Yağmur yağıyor ise güneş doğmuyor. Yağmur yağdığına göre aşağıdakilerden hangisi söylenebilir.

$\bigcirc$ Güneş doğuyor $\bigcirc$ Yağmur yağmıyor $\bigcirc$ Kuşlar ötüyor $\otimes$ Kuşlar ötmüyor $\bigcirc$ Hiçbiri

24.) $p \wedge (q \vee r)$ önermesinin doğruluk tablosunda, bu önermenin sütununda kaç tane 1 vardır?

$\bigcirc$ 1 $\bigcirc$ 2 $\otimes$ 3 $\bigcirc$ 4 $\bigcirc$ Hiçbiri

25.) Aşağıdaki önermelerden hangisi yanlıştır?

$\otimes$ $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^3} \in \mathbb{R}$ $\bigcirc$ 121 asal ise 7 asal değil $\bigcirc$ $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 \in \mathbb{Z}$ $\bigcirc$ $\exists x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x^2+49}$ asal $\bigcirc$

26.) p ve q doğru, r de yanlış bir önerme ise aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

$\bigcirc$ $(p \Longrightarrow r) \vee q$ $\bigcirc$ $(r \wedge q) \Longrightarrow \sim p$ $\bigcirc$ $\sim p \iff (\sim q \wedge \sim r)$ $\bigcirc$ $\sim (p \Longrightarrow r)$ $\otimes$ Hiçbiri

27.) $(a < b \Longrightarrow a = b)$ önermesinin olumsuzu aşağıdakilerden hangisidir? (**İpucu:** $(p \Longrightarrow q) \equiv p' \vee q$)

$\otimes$ $a < b$ $\bigcirc$ $b < a$ $\bigcirc$ $a = b$ $\bigcirc$ $a \geqslant b$ $\bigcirc$ Hiçbiri

28.) $x > y \Longrightarrow x = y$ önermesinin olumsuzu hangisidir? (**İpucu:** $(p \Longrightarrow q) \equiv p' \vee q$)

$\bigcirc$ $x < y$ $\otimes$ $x > y$ $\bigcirc$ $x \leqslant y$ $\bigcirc$ $x \geqslant y$ $\bigcirc$ Hiçbiri

29.) $p \iff q$ önermesinin olumsuzu aşağıdakilerden hangisidir?

$\otimes$ $(p' \vee q) \Longrightarrow (p' \wedge q)$ $\bigcirc$ $p' \iff q'$ $\bigcirc$ $p \vee q$ $\bigcirc$ $p \wedge q$ $\bigcirc$ Hiçbiri

30.) p : "15 asal değil ise $\sqrt{2}$ rasyonel sayıdır", q : "$\sqrt{6} \in \mathbb{Q} \iff 9$ asaldır" olsun. Buna göre:

$\bigcirc$ p, q : Doğru $\bigcirc$ p : Doğru, q : Yanlış $\otimes$ p : Yanlış, q : Doğru $\bigcirc$ p, q : Yanlış $\bigcirc$ Hiçbiri

Bölüm 2

Kümeler

Tanım 2.1 İyi tanımlanmış nesnelerin bir topluluğuna ***küme*** denir. Kümeler genelde $A, B, C, \ldots$ gibi büyük harflerle; kümenin elemanları da $a, b, c \ldots$ gibi küçük harflerle gösterilir. Eğer bir x elemanı bir A kümesine aitse bunu $x \in A$; aksi halde $x \notin A$ şeklinde gösteririz. Bir kümeyi, elemanlarını teker teker yazarak gösterme yöntemine ***listeleme yöntemi*** denir. Mesela

$$A = \{\, 2, 3, 5 \,\}.$$

Bir kümeyi elemanlarının taşıdığı ortak özellikleri söyleyerek yazabiliriz. Bunun için

$$\{\, x : p(x) \,\}$$

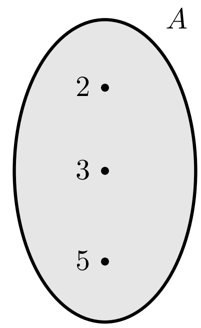
gösterimi kullanılır. Bu küme "$p(x)$ açık önermesini sağlayan bütün x'lerin kümesi"dir. Bu yönteme ***ortak özellik yöntemi*** denir. O zaman

$$A = \left\{\, x \in \mathbb{R} : (x-2)(x^2 - 8x + 15) = 0) \,\right\}$$

yazılabilir. ($\mathbb{R}$ reel sayılar kümesidir.)

Kümeleri düzlemdeki kapalı eğrilerle ve elemanlarını da bu eğri içinde birer nokta olarak gösterebiliriz. Bu yönteme ***Venn***[1] ***Şeması yöntemi*** denir.

[1] John Venn (1834–1923)



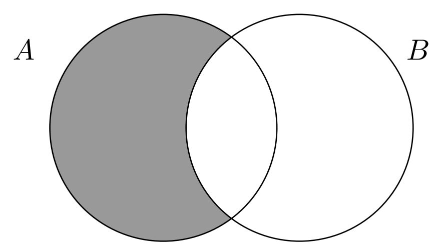
Şekil 2.1: $A = \{ 2, 3, 5 \}$ kümesinin Venn şeması ile gösterimi

Tanım 2.2 A ve B iki küme olsun. Eğer A'nın her elemanı aynı zamanda B'nin de bir elemanı ise A'ya B'nin bir ***alt kümesi*** denir ve $A \subseteq B$ yazılır. Eğer $A \subseteq B$ ve B'de A'ya ait olmayan en az bir eleman varsa A'ya B'nin bir ***özalt kümesi*** denir ve $A \subsetneq B$ yazılır. Eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise o zaman A ile B kümelerine ***eşittir*** denir ve $A = B$ yazılır.

Tanım 2.3 A ve B iki küme olsun. A da olup B de olmayan elemanların kümesine A ile B nin ***farkı*** denir ve $A \setminus B$ veya $A - B$ ile gösterilir.

$$A \setminus B = \{ x : x \in A, x \notin B \} = \{ x \in A : x \notin B \}$$

yazabiliriz. Ancak $A \setminus B = \{ x \notin B : x \in A \}$ yazamayız.



Şekil 2.2: İki kümenin farkı $A \setminus B$

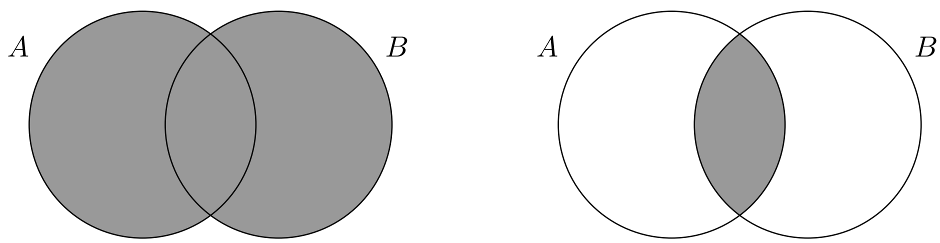
Tanım 2.4 Üzerinde çalışılan en geniş kümeye ***evrensel küme*** diyeceğiz ve E ile göstereceğiz. A bir küme ise A'da olmayan (ve evrensel kümede olan) elemanların kümesine A'nın tümleyeni denir ve A' veya $\overline{A}$ ile gösterilir. O halde:

$$A' = \{ x : x \notin A \} = \{ x \in E : x \notin A \} = E \setminus A$$

yazılabilir. Hiçbir elemanı olmayan kümeye ***boş küme*** denir ve $\emptyset$ ile gösterilir. Boş küme her kümenin alt kümesidir ve bütün boş kümeler birbirine eşittir.

Tanım 2.5 A ve B iki küme olsun. A ya, B'ye veya her ikisine ait olan elemanların kümesine A ile B nin ***birleşimi*** denir ve $A \cup B$ ile gösterilir. Hem A ya hem de B'ye aynı anda ait olan elemanların kümesine A ile B nin ***kesişimi (arakesiti)*** denir ve $A \cap B$ ile gösterilir. Kesişimi boş olan kümelere ***ayrık*** kümeler denir.

$$A \cup B = \{\, x : x \in A \text{ veya } x \in B \,\}$$
$$A \cap B = \{\, x : x \in A \text{ ve } x \in B \,\} = \{\, x \in A : x \in B \,\}$$



Şekil 2.3: İki kümenin birleşimi $A \cup B$ ve kesişimi $A \cap B$

Kümelerle İlgili İşlemlerin Özellikleri

1.) **a)** Her A kümesi için $A \subseteq A$ (Yansıma özelliği)
b) $A \subseteq B, B \subseteq A \Longrightarrow A = B$ (Simetri Özelliği)
c) $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$ dir. (Geçişme özelliği)

2.) $A \cup A = A, A \cap A = A$

3.) $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$

4.) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

5.) Dağılma Kuralları:
a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

6.) $\emptyset' = E, E' = \emptyset$

7.) De Morgan Kuralları:
$(A \cup B)' = A' \cap B'$
$(A \cap B)' = A' \cup B'$

8.) $A \subseteq B \Longrightarrow B' \subseteq A'$

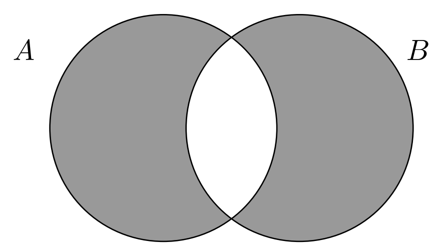
9.) $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$
$A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$

10.) $A \subseteq B \Longrightarrow A \cup B = B$ ve $A \cap B = A$

Not: $A \cup B \cap C, A \cap B \cup C$ veya $A \setminus B \cup C$ gibi ifadeler anlamsızdır. Kümelerdeki işlemlerin öncelik sırası olmadığından mutlaka parantez kullanılmalıdır. Ancak yanyana birden fazla kesişim (veya birleşim) işlemi için parantez kullanılmayabilir. (Neden?)

Tanım 2.6 A ve B iki küme olsun. $A \cup B$ ye ait olup $A \cap B$ ye ait olmayan elemanların kümesine A ile B nin ***simetrik farkı*** denir ve $A \triangle B$ ile gösterilir.

$$A \triangle B = \{ x : x \in A \cup B, x \notin A \cap B \} = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



Şekil 2.4: İki kümenin simetrik farkı $A \triangle B$

Şekilden de anlaşılacağı gibi $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ diyebiliriz. Ayrıca $A \triangle B = B \triangle A$ dır, çünkü:

$$A \triangle B = \{ x : x \in A \cup B, x \notin A \cap B \} = \{ x : x \in B \cup A, x \notin B \cap A \} = B \triangle A.$$

Tanım 2.7 Eleman sayısına bir doğal sayı karşılık getirilebilen kümelere ***sonlu küme***; aksi halde ***sonsuz küme*** denir. Mesela $(0, 1)$ açık aralığı ve tek doğal sayılar kümesi $\{ 1, 3, 5, \dots \}$ sonsuz kümelerdir. $B = \{ a, b, c, d \}$ kümesi 4 elemanlı olup sonlu bir kümedir. Bir A kümesinin eleman sayısını $s(A)$ ile göstereceğiz. Bu durumda $s(\emptyset) = 0$ olur. Ayrıca

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$
$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$$

formülleri doğrudur. A, B ve C kümeleri ikişer ikişer ayrık iseler:

$$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C).$$

Kümeler Ailesi

Elimizde bir takım kümeler olsun. Bu kümeleri $A, B, C, D, \dots$ gibi harflerle göstermek yerine; mesela $A_1, A_2, A_3, \dots$ şeklinde göstermek daha kolay olacaktır. Bu durumda kümeleri $I = \{ 1, 2, 3, \dots \}$ kümesinin elemanlarını kullanarak indislemiş (damgalamış) oluruz. İşte bir takım kümeleri indislemek için kullandığımız I kümesine ***indis kümesi***, her $i \in I$ elemanına bir ***indis***, her $i \in I$ için A_i kümesine de ***indislenmiş küme*** denir. Elemanları bir I indis kümesi tarafından indislenmiş kümelerin kümesine de bir ***kümeler ailesi*** denir. Böyle bir kümeler ailesi

$$\mathcal{A} = \{ A_i : i \in I \}$$

şekline gösterilir.

Örnek 2.8 $\mathcal{A} = \{ \{ a, b \}, \{ a \}, \{ a, e, f, g \}, \{ a, d \} \}$ olsun. Burada $I = \{ 1, 3, 4, 6 \}$ indis kümesi ve

$$A_1 = \{ a, b \}, A_3 = \{ a \}, A_4 = \{ a, e, f, g \}, A_6 = \{ a, c \}$$

diyebiliriz. Bu durumda $\mathcal{A} = \{ A_i : i \in I \}$ yazılır.

Tanım 2.9 $\mathcal{A} = \{ A_i : i \in I \}$ kümeler ailesi verilsin. Bu ailenin ***birleşimi***

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{ x : \text{ En az bir } i \text{ için } x \in A_i \}$$

şeklinde tanımlanır. Bu ailenin ***kesişimi*** de

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{ x : \text{ Her } i \text{ için } x \in A_i \}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.10 Bir önceki örnekte:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_6 = \{ a, b, c, e, f, g \}$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 = \{ a \}$$

Örnek 2.11 $I = \{ 1, 2, 3, \dots \}$ ve her $n \in I$ için $A_n = [0, \frac{1}{n}]$ kapalı aralığı olsun. Bu durumda

$$\bigcup_{n \in I} A_n = [0, 1], \qquad \bigcap_{n \in I} A_n = \{ 0 \}.$$

Genelleştirilmiş Dağılma Kuralları

$\mathcal{A} = \{ A_i : i \in I \}$ ve $\mathcal{B} = \{ B_j : j \in J \}$ aileleri verilsin. Bu durumda kesişimin birleşim üzerine dağılma kuralının genel hali:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}(A_i \cap B_j)\right)$$

Ayrıca, birleşimin kesişim üzerine dağılma kuralının genel hali:

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}(A_i \cup B_j)\right)$$

İspat:

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) &\iff x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \text{ ve } x \in \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)\\
&\iff \exists i \in I, x \in A_i \text{ ve } \exists j \in J, x \in B_j\\
&\iff \exists i \in I \text{ ve } \exists j \in J \text{ için } x \in A_i \text{ ve } x \in B_j\\
&\iff \exists i \in I \text{ ve } \exists j \in J \text{ için } x \in A_i \cap B_j\\
&\iff x \in \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}(A_i \cap B_j)\right)
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır. Diğer kısmın ispatı da şöyledir:

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) &\iff x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \text{ veya } x \in \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)\\
&\iff \forall i \in I, x \in A_i \text{ veya } \forall j \in J, x \in B_j\\
&\iff \forall i \in I \text{ ve } \forall j \in J \text{ için } x \in A_i \text{ veya } x \in B_j\\
&\iff \forall i \in I \text{ ve } \forall j \in J \text{ için } x \in A_i \cup B_j\\
&\iff x \in \bigcap_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}(A_i \cup B_j)\right)
\end{aligned}$$

Örnek 2.12 $\mathcal{A} = \{ A_1, A_3, A_5 \}$ ve $\mathcal{B} = \{ B_2, B_4 \}$ olsun. Bu durumda $I = \{ 1, 3, 5 \}$, $J = \{ 2, 4 \}$ olur.

$$(A_1 \cup A_3 \cup A_5) \cap (B_2 \cup B_4) =$$
$$(A_1 \cap B_2) \cup (A_1 \cap B_4) \cup (A_3 \cap B_2) \cup (A_3 \cap B_4) \cup (A_5 \cap B_2) \cup (A_5 \cap B_4)$$

Genelleştirilmiş De Morgan Kuralları

$\{ A_i : i \in I \}$ ailesi verilsin. Bu durumda

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)' = \bigcup_{i\in I} {A_i}' \qquad \text{ve} \qquad \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' = \bigcap_{i\in I} {A_i}'$$

İspat:

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)' &\iff x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \\ &\iff \exists i \in I \text{ için } x \notin A_i \\ &\iff \exists i \in I \text{ için } x \in {A_i}' \\ &\iff x \in \bigcup_{i\in I} {A_i}' \end{aligned}$$

Diğer kısmın ispatı da şöyledir:

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' &\iff x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \\ &\iff \forall i \in I \text{ için } x \notin A_i \\ &\iff \forall i \in I \text{ için } x \in {A_i}' \\ &\iff x \in \bigcap_{i\in I} {A_i}' \end{aligned}$$

Çözümlü Örnekler

1.) $A \setminus B = A \cap B'$ olduğunu gösterin.
Çözüm:

$$A \setminus B = \{ x : x \in A \text{ ve } x \notin B \} = \left\{ x : x \in A \text{ ve } x \in B' \right\} = A \cap B'$$

2.) $A \cup B = B \cap C \Longrightarrow A \subseteq B \subseteq C$ olduğunu gösterin.
Çözüm: $A \subseteq A \cup B$ olduğunu biliyoruz. $A \cup B = B \cap C$ olduğundan $A \subseteq B \cap C$ elde edilir. Ayrıca $B \cap C \subseteq B$ olduğundan, $A \subseteq B$ bulunur. Benzer şekilde:

$$B \subseteq A \cup B = C \cap B \text{ olup } B \subseteq B \cap C \subseteq C$$

olduğundan $B \subseteq C$ bulunur. Sonuç olarak $A \subseteq B \subseteq C$ dir.

3.) $A \cup B = A \cap B \iff A = B$ olduğunu gösterin.
Çözüm: Önce $A \cup B = A \cap B$ olduğunu kabul edelim. $A = B$ olduğunu göstermek için $A \subseteq B$ ve

$B \subseteq A$ olduğunu göstereceğiz.

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \cup B = A \cap B \subseteq B \text{ olduğundan } A \subseteq B \\ B \subseteq A \cup B = A \cap B \subseteq A \text{ olduğundan } B \subseteq A \end{array}\right\} \Longrightarrow A = B.$$

Şimdi de $A = B$ olduğunu kabul edelim.

$$A \cup B = A \cup A = A = A \cap A = A \cap B.$$

Bu kısmın ispatı şöyle de yapılabilirdi:

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B = A \cup A = A \\ A \cap B = A \cap A = A \end{array}\right\} \Longrightarrow A \cup B = A \cap B.$$

4.) $A \subseteq B \Longrightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$ olduğunu gösterin.
Çözüm: $A \subseteq B$ olduğunu kabul edelim. O halde $x \in A \Longrightarrow x \in B$ dir.

$$x \in A \cup C \Longrightarrow x \in A \text{ veya } x \in C \Longrightarrow x \in B \text{ veya } x \in C \Longrightarrow x \in B \cup C$$

olup seçilen x keyfi olduğundan önerme her x için doğrudur. O halde $A \cup C$ nin her elemanı $B \cup C$ nin bir elemanı olup ispat biter.

Not: Bu tür ispatlarda $p(x) \Longrightarrow q(x)$ önermesi doğru ise "oklar soldan sağa doğru ilerlerken" $p(x)$ yerine $q(x)$ yazılabilir. ($q(x)$ yerine $p(x)$ yazılamaz.) Yine $p(x) \Longrightarrow q(x)$ önermesi doğru ise

$$\{\, x : p(x) \,\} \subseteq \{\, x : q(x) \,\}$$

kapsaması vardır. $p(x) \iff q(x)$ önermesi doğru ise; yani $p(x) \equiv q(x)$ ise

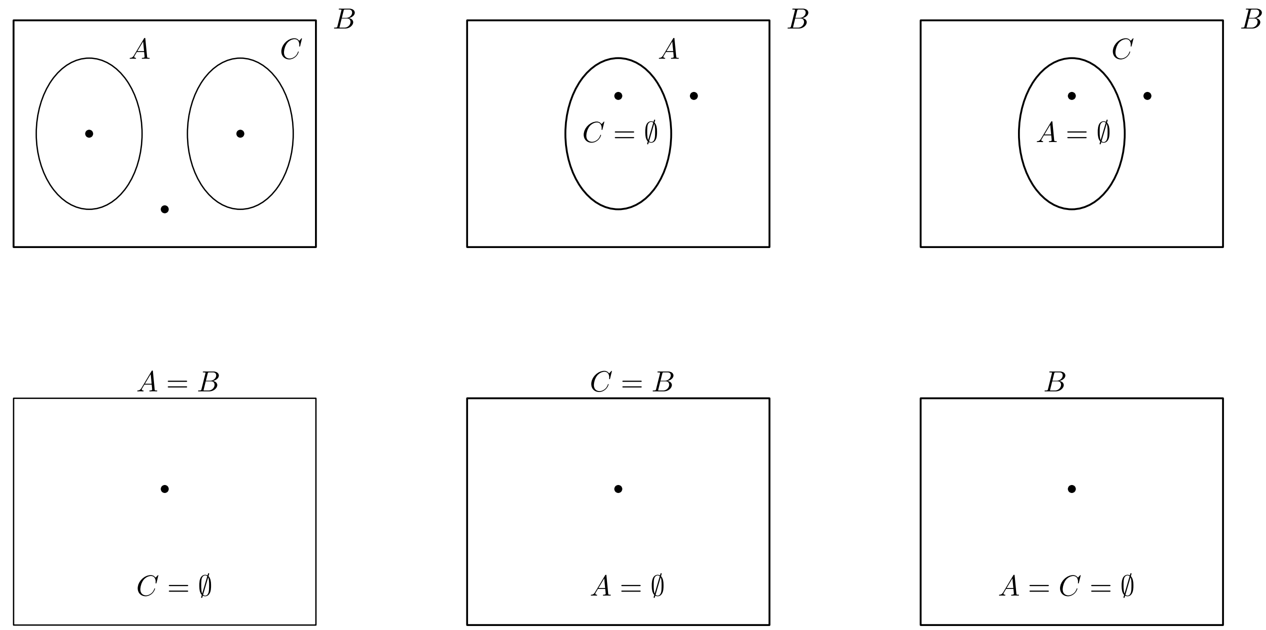
$$\{\, x : p(x) \,\} = \{\, x : q(x) \,\}$$

eşitliği vardır.

5.) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ olduğunu gösterin.
Çözüm:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{\, x : x \in A \text{ veya } x \in B \cap C \,\} \\ &= \{\, x : x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ ve } x \in C) \,\} \\ &= \{\, x : (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ ve } (x \in A \text{ veya } x \in C) \,\} \\ &= \{\, x : (x \in A \cup B) \text{ ve } (x \in A \cup C) \,\} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

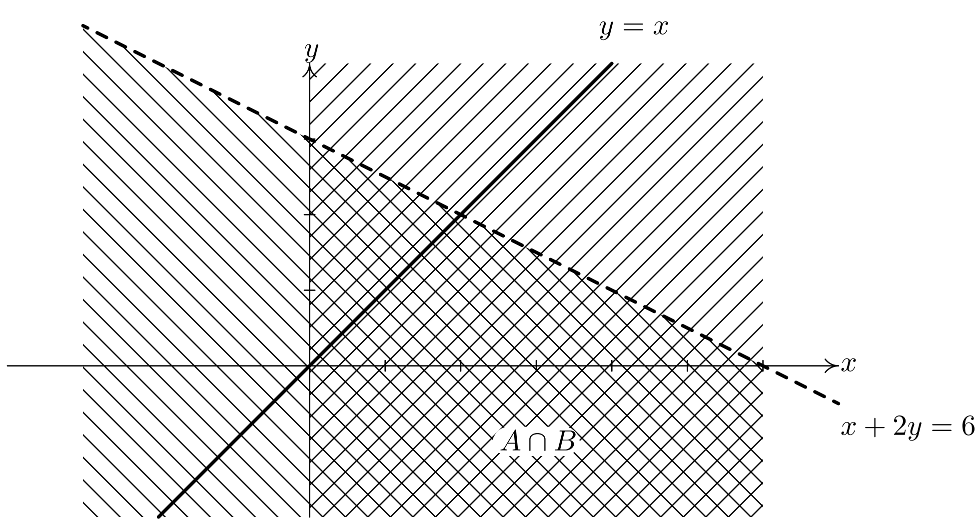
6.) $A \subseteq B, C \subseteq B, A \cap C = \emptyset$ veriliyor. Bu kümelerin boş olup olmamasına göre farklı bütün durumları Venn şeması ile gösterin.
Çözüm: Toplam 7 durum vardır. Şekilde 6 durum gösterilmiş olup son durum $A = B = C = \emptyset$ durumudur.

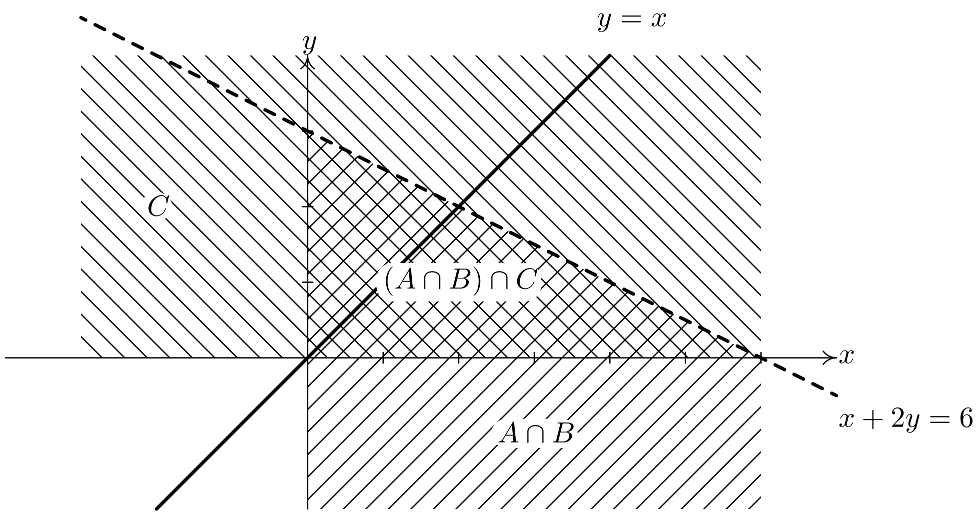


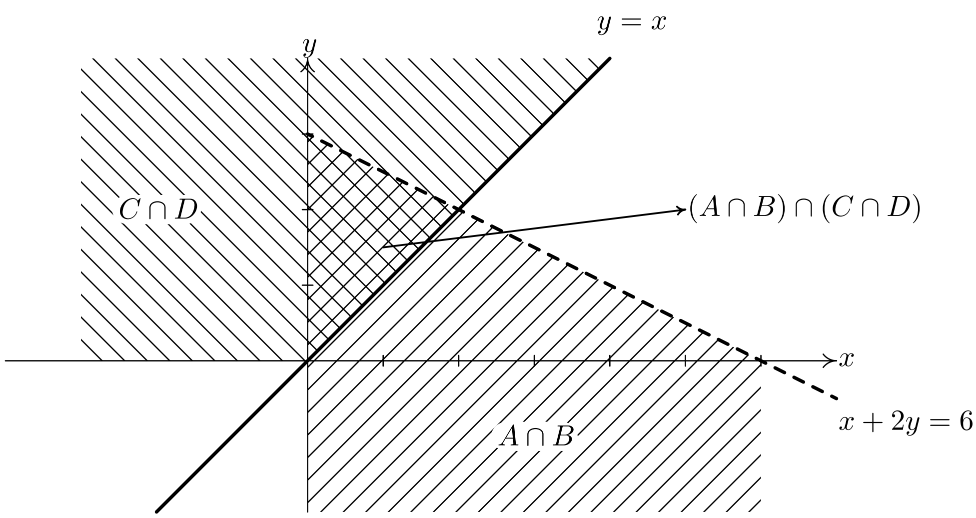
7.) Aşağıda kartezyen düzlemin A, B, C ve D altkümeleri verilmiştir. Buna göre sırasıyla $A \cap B$, $(A \cap B) \cap C$ ve $(A \cap B) \cap (C \cap D)$ kümelerini Venn şeması ile gösterin.

$$A = \{\, (x, y) : x \geqslant 0 \,\} \qquad B = \{\, (x, y) : x + 2y < 6 \,\}$$
$$C = \{\, (x, y) : y \geqslant 0 \,\} \qquad D = \{\, (x, y) : y - x \geqslant 0 \,\}$$

Çözüm:







8.) De Morgan Kurallarını ispatlayın. Yani $(A\cup B)' = A'\cap B'$ ve $(A\cap B)' = A'\cup B'$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
(A\cup B)' &= \left\{ x : x \in (A\cup B)' \right\} = \{ x : x \notin (A\cup B) \} \\
&= \{ x : x \notin A \text{ ve } x \notin B \} = \left\{ x : x \in A' \text{ ve } x \in B' \right\} = A'\cap B'. \\
(A\cap B)' &= \left\{ x : x \in (A\cap B)' \right\} = \{ x : x \notin (A\cap B) \} \\
&= \{ x : x \notin A \text{ veya } x \notin B \} = \left\{ x : x \in A' \text{ veya } x \in B' \right\} = A'\cup B'.
\end{aligned}$$

9.) $A \setminus B = A \setminus (A\cap B)$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$A \setminus (A\cap B) = A\cap (A\cap B)' = A\cap (A'\cup B') = \underbrace{(A\cap A')}_{\emptyset}\cup(A\cap B') = A\cap B' = A\setminus B$$

10.) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cap C') = (A \cap B') \cap C' = (A \setminus B) \cap C' = (A \setminus B) \setminus C$$

11.) $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$(A \cap B) \cap (A \setminus B) = (A \cap B) \cap (A \cap B') = (A \cap A) \cap (B \cap B') = A \cap \emptyset = \emptyset$$

12.) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$(A \setminus B) \cap B = (A \cap B') \cap B = A \cap \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset} = A \cap \emptyset = \emptyset$$

13.) $A' \setminus B' = B \setminus A$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$A' \setminus B' = \left\{ x : x \in A' \text{ ve } x \notin B' \right\} = \left\{ x : x \in A' \text{ ve } x \in B \right\} = \{ x : x \in B \text{ ve } x \notin A \} = B \setminus A$$

14.) $A \subseteq A \cup B$ ve $A \cap B \subseteq A$ olduğunu gösterin.

Çözüm: "$x \in A \Longrightarrow x \in A$ veya $x \in B$" önermesi her zaman doğru olur. (Yani $x \in B$ olmasa da doğrudur.) O halde $A \subseteq A \cup B$ dir. Benzer şekilde $x \in A \cap B$ ise $x \in A$ önermesi her zaman doğrudur. O halde $A \cap B \subseteq A$ dir.

15.) $A \subseteq B \Longrightarrow A \cup (B - A) = B$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $A \subseteq B$ ise $A \cup B = B$ ve $A \cap B = A$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A') = \underbrace{(A \cup B)}_{B} \cap \underbrace{(A \cup A')}_{E} = B \cap E = B$$

16.) $A \cup B = \emptyset \Longrightarrow A = \emptyset$ ve $B = \emptyset$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $A \cup B = \emptyset$ olsun. $A \subseteq A \cup B$ olacağından $A \subseteq \emptyset$ olur. Ayrıca boş küme her kümenin alt kümesi olduğundan $\emptyset \subseteq A$ dır. Buradan $A = \emptyset$ elde edilir. Benzer şekilde $B = \emptyset$ dir.

17.) A ve B kümeleri için $A \subseteq B \iff A \cup B = B$ olduğunu gösterin.

Çözüm: ($\Longrightarrow$) Önce $A \subseteq B$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \in A \Longrightarrow x \in B$ dir. O zaman

$$x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A \text{ veya } x \in B \Longrightarrow x \in B \text{ veya } x \in B \Longrightarrow x \in B$$

olup $A \cup B \subseteq B$ olur. Ayrıca $B \subseteq A \cup B$ her zaman doğru olduğundan $A \cup B = B$ elde edilir.

($\Longleftarrow$) Şimdi $A \cup B = B$ olduğunu kabul edelim. $A \subseteq A \cup B$ olduğunu biliyoruz. $A \cup B = B$ olduğundan $A \subseteq B$ elde edilir.

18.) $(A')' = A$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$A = \{\, x : x \in A \,\} = \left\{\, x : x \notin A' \,\right\} : \left\{\, x : x \in (A')' \,\right\} = (A')'.$$

19.) $A \cup B = E$ ve $A \cap B = \emptyset \iff B = A'$ olduğunu gösterin. (E : evrensel kümedir)

Çözüm: ($\Longrightarrow$) $A \cup B = E$ ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. $x \in A' \Longrightarrow x \notin A$ dır. Fakat $x \in E$ olmalı; yani $x \in A \cup B$ olmalıdır. O halde $x \in B$ olmalı. Yani $A' \subseteq B$ dir. Şimdi de

$$x \in B \Longrightarrow A \cap B = \emptyset \text{ olduğundan } x \notin A \Longrightarrow x \in A'$$

olup $B \subseteq A'$ elde edilir. Sonuç olarak $B = A'$ dür.

($\Longleftarrow$) $B = A' \Longrightarrow A \cup B = A \cup A' = E$ dir. Ayrıca $A \cap B = A \cap A' = \emptyset$.

20.) $A - B = \emptyset \iff A \subseteq B$ olduğunu gösterin.

Çözüm: ($\Longrightarrow$) $A - B = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. $x \in A$ alalım. $x \in B$ olduğunu göstereceğiz. Aksini kabul edelim; yani $x \notin B$ olsun. Bu durumda $x \in B'$ olur. O halde $x \in A \cap B' = A - B$ olmalıdır. Bu bir çelişkidir, çünkü $A - B = \emptyset$ kabul edilmiştir.

($\Longleftarrow$) Şimdi $A \subseteq B$ kabul edelim. Bu durumda $A \cap B = A$ olur. Şimdi

$$A - B = A \cap B' = (A \cap B) \cap B' = A \cap (B \cap B') = A \cap \emptyset = \emptyset.$$

21.) $A \triangle (A \cap B) = A - B$ olduğunu gösterin.

Çözüm: $A \cap B \subseteq A$ olduğundan $A \cup (A \cap B) = A$ dır.

$$\begin{aligned} A \triangle (A \cap B) &= (A \cup (A \cap B)) - (A \cap (A \cap B)) \\ &= A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)' = A \cap (A' \cup B') \\ &= (A \cap A') \cup (A \cap B') = \emptyset \cup (A \cap B') \\ &= A \cap B' = A - B. \end{aligned}$$

22.) $A \triangle B = \emptyset \iff A = B$ olduğunu gösterin.

Çözüm: ($\Longrightarrow$) $A \triangle B = \emptyset \Longrightarrow (A - B) \cup (B - A) = \emptyset \Longrightarrow A - B = \emptyset$ ve $B - A = \emptyset \Longrightarrow A \subseteq B$ ve $B \subseteq A \Longrightarrow A = B$. (**Not:** $A - B = \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $A \subseteq B$ dır.)

($\Longleftarrow$) $A = B \Longrightarrow A \triangle B = A \triangle A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \emptyset$.

23.) $(A \triangle B)' = (A' \cup B) \cap (A \cup B')$ olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$\begin{aligned}(A\triangle B)' &= [(A-B)\cup(B-A)]' = \big[(A\cap B')\cup(B\cap A')\big]' \\ &= \overline{(A\cap B')}\cap\overline{(B\cap A')} = (A'\cup B)\cap(A\cup B')\end{aligned}$$

24.) $A\triangle(A\cup B) = B-(A\cap B)$ olduğunu gösterin.

Çözüm: Eşitliğin sol tarafı en sade şekle getirilirse:

$$\begin{aligned}A\triangle(A\cup B) &= (A\cup(A\cup B))-(A\cap(A\cup B)) = (A\cup B)-A \\ &= (A\cup B)\cap A' = (A\cap A')\cup(B\cap A') = \emptyset\cup(B\cap A') \\ &= B\cap A'\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de eşitşiğin sağ tarafını sadeleştirelim:

$$\begin{aligned}B-(A\cap B) &= B\cap(A\cap B)' = B\cap(A'\cup B') \\ &= (B\cap A')\cup(B\cap B') = (B\cap A')\cup\emptyset \\ &= B\cap A'\end{aligned}$$

Eşitliğin her iki tarafı da $B\cap A'$ olduğundan çözüm tamamlanmıştır.

25.) $\mathcal{A} = \{\, A_i : i\in I \,\}$ ailesi verilsin. Her $i\in I$ için $A_i\subseteq B$ ise

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq B$$

olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$x\in\bigcup_{i\in I}A_i \Longrightarrow \exists i\in I \text{ için } x\in A_i \Longrightarrow x\in B \text{ (Çünkü } A_i\subseteq B)$$

26.) $\mathcal{A} = \{\, A_i : i\in I \,\}$ ailesi verilsin. Her $i\in I$ için $B\subseteq A_i$ ise

$$B\subseteq\bigcap_{i\in I}A_i$$

olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$x\in B \Longrightarrow \forall i\in I \text{ için } x\in A_i \text{ (Çünkü } B\subseteq A_i) \Longrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}A_i$$

Çoktan Seçmeli Sorular

1.) $A\subseteq B$ ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

○ $A' = B$ ⊗ $A\setminus B=\emptyset$ ○ $A'\subseteq B$ ○ $A\cap B\neq\emptyset$ ○ Hiçbiri

2.) $A \setminus B = A$ olması için gerek ve yeter şart nedir?

○ $A = B$ ○ $A \subseteq B$ ○ $B \subseteq A$ ○ $B = \emptyset$ ⊗ Hiçbiri

3.) $A = [0, 2]$ ve $B = [1, 7]$ aralıkları ise $A \triangle B$ ise aşağıdakilerden hangisidir?

○ $(1, 2)$ ⊗ $[0, 1) \cup (2, 7]$ ○ $\emptyset$ ○ $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ ○ Hiçbiri

4.) $B = \{ \{ \emptyset \}, \emptyset, 0, \{ 0, \emptyset \} \}$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

○ $\{ \emptyset \} \subseteq B$ ○ $\{ \emptyset, 0 \} \subseteq B$ ○ $\emptyset \subseteq B$ ○ $\{ \{ \emptyset \} \} \subseteq B$ ⊗ Hiçbiri

5.) $A \triangle B$ kümesi ile B kümesinin tümleyeninin simetrik farkı hangisidir?

○ $A \setminus B$ ○ $B \cap A$ ○ $E \setminus (A \cap B)$ ⊗ $E \setminus A$ ○ Hiçbiri

6.) $A \cap B = A$ ve $B \cap C = \emptyset$ ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

⊗ $A \cap C = \emptyset$ ○ $A = B$ ○ $B \cup C = E$ ○ $A \cup B = A$ ○ Hiçbiri

7.) $\mathcal{A} = \{ A_i : i \in I \}$ ailesi verilsin. $\forall i \in I$ için $x \in {A_i}'$ olması için gerek ve yeter şart nedir?

○ $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ ○ $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$ ⊗ $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ ○ $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ ○ Hiçbiri

8.) $\mathcal{A} = \{ A_i : i \in I \}$ ailesi verilsin. $\exists\, i \in I$ için $B \subseteq A_i$ ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

○ $B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$ ⊗ $B \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ ○ $\bigcap_{i \in I} A_i = B$ ○ $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$ ○ Hiçbiri

9.) Evrensel küme ile $A \cup B$ kümesinin simetrik farkı aşağıdakilerden hangisidir?

○ $A \triangle B$ ○ $A \cap B$ ○ $A' \cup B'$ ⊗ $A' \cap B'$ ○ Hiçbiri

10.) A ve B kümeleri <u>ayrık</u> iki küme olsun. $s(A \cup B) = 8$, $s(A \cap B') = 5$ ise $s(B)$ kaçtır?

○ 4 ⊗ 3 ○ 5 ○ 2 ○ Hiçbiri

11.) $[(A \cup B) \setminus B] \cap A$ aşağıdakilerden hangisidir?

○ $A' \cap B'$ ○ $A' \cap B$ ⊗ $A \setminus B$ ○ $A \cap B$ ○ Hiçbiri

12.) Aşağıdakilerden hangisi doğru ise $A \cup B = E$ her zaman doğrudur?

○ $B \subseteq A'$ ⊗ $A' \subseteq B$ ○ $A \subseteq A \setminus B$ ○ $A \cap B \neq \emptyset$ ○ Hiçbiri

13.) $A \cap B = A$ ise $A \cap B'$ aşağıdakilerden hangisidir?

⊗ $\emptyset$ ○ $A \cup B$ ○ A ○ $B \setminus A$ ○ Hiçbiri

14.) $\mathcal{A} = \{ A_i : i \in I \}$ ailesi verilsin. Her $k \in I$ için aşağıdakilerden hangisi doğrudur.

○ $A_k \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$ ○ $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq A_k$ ⊗ $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_k$ ○ $\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)' \subseteq A_k$ ○ Hiçbiri

15.) $\mathcal{A} = \{ A_i : i \in I \}$ ailesi verilsin. $\forall\, i \in I$ için $x \notin A_i$ olması için gerek ve yeter şart nedir?

○ $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ ○ $x \in \bigcup_{i \in I} {A_i}'$ ○ $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ ⊗ $x \in \bigcap_{i \in I} {A_i}'$ ○ Hiçbiri

16.) A ile B ayrık ise $(A \setminus B) \cup (E \triangle A)$ nedir? (E: Evrensel küme)

○ $A \cup B$ ○ A ○ B ⊗ E ○ Hiçbiri

17.) $(A \setminus B) \triangle (B \setminus A)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

○ A ○ $B \setminus A$ ○ $A \cap B$ ○ B ⊗ Hiçbiri

18.) $A \triangle B = A' \triangle B'$ eşitliği hangi şartlar altında doğrudur?

○ $A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$ ○ $A \cap B = \emptyset$ ○ $A = B$ ⊗ Her zaman doğru ○ Hiçbiri

19.) A ve B kümeleri ayrık iseler aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

○ $A \triangle B = E$ ○ $A \triangle B = \emptyset$ ○ $A \setminus B = \emptyset$ ○ $A' \subseteq B$ ⊗ Hiçbiri

20.) $A \subseteq B$ ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

○ $A' = B$ ○ $A' \subseteq B$ ○ $A \cap B \neq \emptyset$ ⊗ $A \setminus B = \emptyset$ ○ Hiçbiri

21.) $\mathcal{A} = \{ A_i : i \in I \}$ ailesi verilsin. $\exists i \in I$ için $x \in {A_i}'$ olması için gerek ve yeter şart nedir?

○ $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ ⊗ $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$ ○ $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ ○ $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ ○ Hiçbiri

22.) $A \triangle B = A \cup B$ ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

⊗ A ile B ayrıktır ○ $A \setminus B = \emptyset$ ○ $B \setminus A = \emptyset$ ○ $A = B$ ○ Hiçbiri

23.) $A \setminus B = B \setminus A$ olması için gerek ve yeter şart nedir?

○ $A = B = \emptyset$ ⊗ $A = B$ ○ $A \cup B = E$ ○ $A \cap B = \emptyset$ ○ Hiçbiri

24.) $A \cup B = E$ ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

○ $A \subseteq B'$ ○ $A = B'$ ○ $B' \cup A = B$ ○ $A \cap B = \emptyset$ ⊗ Hiçbiri

25.) $A \triangle (B \setminus A)$ aşağıdakilerden hangisidir?

○ A ○ $B \setminus A$ ○ $A \cap B$ ○ $A \setminus B$ ⊗ Hiçbiri

26.) $B = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, a, \{ a \}, \{ 1 \} \}$ ise aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

○ $\emptyset \subseteq B$ ○ $\emptyset \in B$ ○ $\{ a \} \subseteq B$ ○ $\{ a, \emptyset \} \subseteq B$ ⊗ Hiçbiri

27.) $\mathcal{A} = \{ A_i : i \in I \}$ ailesi verilsin. $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$ ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

○ $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ ○ $\exists i \in I, x \in A_i$ ⊗ $\exists i \in I, x \in {A_i}'$ ○ $x \in \bigcap_{i \in I} {A_i}'$ ○ Hiçbiri

28.) $(E \setminus A) \cap (E \setminus B) = \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart nedir?

○ $A = B$ ⊗ $A \cup B = E$ ○ $A = B = \emptyset$ ○ $A \cap B = \emptyset$ ○ Hiçbiri

29.) $A' \cap (A' \cup B')'$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

○ $A \cap B$ ○ A' ○ $A \cup B$ ○ $A \setminus B$ ⊗ Hiçbiri

30.) $X = (-1, 4]$ ve $Y = (-2, 2) \cup \{3\}$ ise $X \triangle Y$ hangisidir?

○ $(-2, -1] \cup [2, 4]$ ○ $(-2, -1) \cup [2, 4]$ ○ $(-2, -1] \cup (2, 4]$ ○ $(-2, -1) \cup (2, 4]$ ⊗ Hiçbiri

Bölüm 3

Bağıntılar ve Özellikleri

Tanım 3.1 a ve b herhangi iki eleman olmak üzere (a, b) şeklindeki bir ifadeye bir ***sıralı ikili*** denir. Burada a' ya ***1. bileşen***; b'ye de ***2. bileşen*** denir. İki sıralı ikilinin eşit olması şöyle tanımlanır:

$$\boxed{(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ ve } b = d.}$$

Dolayısıyla genelde $(a, b) \neq (b, a)$ dır. Benzer şekilde $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şeklindeki bir ifadeye bir ***sıralı*** **n**−***li*** denir.

Kartezyen Çarpım

Tanım 3.2 A ve B iki küme olsun. Birinci bileşenleri A dan; ikinci bileşenleri B den olan bütün sıralı ikililerin kümesine A ile B nin ***kartezyen çarpımı*** denir ve $A \times B$ ile gösterilir. Yani

$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A \text{ ve } b \in B \}.$$

Özel olarak $B = A$ ise:

$$A \times A = \{ (a, b) : a \in A \text{ ve } b \in A \}$$

kümesi yazılabilir ve bu küme kısaca A^2 ile gösterilir. Genel olarak sıralı n–lilerin kümesi tanımlanabilir. O halde

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\text{–tane}} = A^n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in A \}$$

yazabiliriz.

Kartezyen Çarpımın Özellikleri

Teorem 3.3 A, B, C ve D dört tane küme olsun.

1.) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

2.) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

3.) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

4.) $A \subseteq B \Longrightarrow A \times C \subseteq B \times C$

5.) $A \subseteq B$ ve $C \subseteq D \Longrightarrow A \times C \subseteq B \times D$

İspat 1.) $A \times \emptyset = \{ (x, y) : x \in A \text{ ve } y \in \emptyset \}$ kümesi boşkümedir; çünkü $y \in \emptyset$ önermesi her zaman yanlıştır. Dolayısıyla "$a \in A$ ve $y \in \emptyset$" her zaman yanlıştır. Benzer şekilde $\emptyset \times A = \emptyset$ dir.

İspat 2.)

$$\begin{aligned}
(x, y) \in A \times (B \cup C) &\iff x \in A \text{ ve } y \in B \cup C \\
&\iff x \in A \text{ ve } (y \in B \text{ veya } y \in C) \\
&\iff (x \in A \text{ ve } y \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } y \in C) \\
&\iff (x, y) \in A \times B \text{ veya } (x, y) \in A \times C \\
&\iff (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

İspat 3.) $p \wedge q \wedge r \equiv (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$ denkliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
(x, y) \in A \times (B \cap C) &\iff x \in A \text{ ve } y \in B \cap C \\
&\iff x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } y \in C \\
&\iff (x \in A \text{ ve } y \in B) \text{ ve } (x \in A \text{ ve } y \in C) \\
&\iff (x, y) \in A \times B \text{ ve } (x, y) \in A \times C \\
&\iff (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

İspat 4.) $(x, y) \in A \times C \Longrightarrow x \in A \text{ ve } y \in C \Longrightarrow x \in B \text{ ve } y \in C \Longrightarrow (x, y) \in B \times C$

olup ispat biter.

İspat 5.) $(x, y) \in A \times C \Longrightarrow x \in A \text{ ve } y \in C \Longrightarrow x \in B \text{ ve } y \in D \Longrightarrow (x, y) \in B \times D$

olup ispat biter. □

Şimdi de kartezyen çarpımın birleşim ve kesişim üzerine dağılma özelliklerini genel olarak ispatlayalım:

Teorem 3.4 $\mathcal{A} = \{ A_i : i \in I \}$ ve $\mathcal{B} = \{ B_j : j \in J \}$ aileleri verilsin.

1.) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$

2.) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)$

İspat 1.)

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) &\iff x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \text{ ve } y \in \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \\
&\iff \exists i \in I, x \in A_i \text{ ve } \exists j \in J, y \in B_j \\
&\iff \exists i \in I \text{ ve } \exists j \in J, x \in A_i \text{ ve } y \in B_j \\
&\iff \exists (i,j) \in I \times J, (x,y) \in A_i \times B_j \\
&\iff (x,y) \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)
\end{aligned}$$

İspat 2.)

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) &\iff x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \text{ ve } y \in \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \\
&\iff \forall i \in I, x \in A_i \text{ ve } \forall j \in J, y \in B_j \\
&\iff \forall i \in I \text{ ve } \forall j \in J, x \in A_i \text{ ve } y \in B_j \\
&\iff \forall (i,j) \in I \times J, (x,y) \in A_i \times B_j \\
&\iff (x,y) \in \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (A_i \times B_j)
\end{aligned}$$

Örnek 3.5 A, B, C, D dört tane küme olmak üzere:

1.) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ eşitliğinin her zaman doğru olduğunu;

2.) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ eşitliğinin her zaman doğru olmadığını gösterin.

Çözüm 1.)

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\iff (x,y) \in A \times B \text{ ve } (x,y) \in C \times D \\
&\iff x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } x \in C \text{ ve } y \in D \\
&\iff (x \in A \text{ ve } x \in C) \text{ ve } (y \in B \text{ ve } y \in D) \\
&\iff x \in A \cap C \text{ ve } y \in B \cap D \\
&\iff (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)
\end{aligned}$$

Çözüm 2.) $A = \{a, b\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{b\}$ ve $D = \{2, 3, 4\}$ alınırsa eşitliğin doğru olmadığı görülür:

$$\begin{aligned}(A \times B) \cup (C \times D) &= \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4)\},\\ (A \cup C) \times (B \cup D) &= \{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4)\}.\end{aligned}$$

Örnek 3.6 $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ olduğunu gösterin.
Çözüm: $y \notin C \Longrightarrow (x, y) \notin A \times C$ olacağından;

$$\begin{aligned}(x,y) \in A \times (B \setminus C) &\Longrightarrow x \in A \text{ ve } y \in B \setminus C\\ &\Longrightarrow x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } y \notin C\\ &\Longrightarrow (x,y) \in A \times B \text{ ve } (x,y) \notin A \times C\\ &\Longrightarrow (x,y) \in (A \times B) \setminus (A \times C).\end{aligned}$$

Ayrıca;

$$\begin{aligned}(x,y) \in (A \times B) \setminus (A \times C) &\Longrightarrow (x,y) \in A \times B \text{ ve } (x,y) \notin A \times C\\ &\Longrightarrow x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } (x \notin A \text{ veya } y \notin C)\\ &\Longrightarrow (x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } x \notin A) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } y \notin C)\\ &\Longrightarrow x \in A \text{ ve } y \in B \text{ ve } y \notin C\\ &\Longrightarrow x \in A \text{ ve } y \in (B \setminus C)\\ &\Longrightarrow (x,y) \in A \times (B \setminus C).\end{aligned}$$

olup iki kümenin eşitliği gösterilmiş olur.

ALIŞTIRMALAR

1.) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ önermesinin doğru olması için gerek ve yeter şart nedir?
⊗ Her zaman doğru ○ $A = \emptyset$ ○ $A = B = C = \emptyset$ ○ $A = \emptyset$ veya $B \cap C = \emptyset$ ○ Hiçbiri

2.) "$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$" önermesi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?
○ Bazen doğru ○ Sadece $A = \emptyset$ ise doğru ⊗ Her zaman doğru ○ Her zaman yanlış ○ Hiçbiri

3.) $A \times (B \cup C) = \emptyset$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?
○ $A \cup B = \emptyset$ ○ $B \cap C = \emptyset$ ○ $B \times C = \emptyset$ ⊗ $A \cap C = \emptyset$ ○ Hiçbiri

4.) Her A, B, C kümesi için p :"$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$" ve q :"$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$" ise:
○ p, q : Doğru ○ p: Doğru, q: Yanlış ⊗ p: Yanlış, q: Doğru ○ p, q: Yanlış ○ Hiçbiri

5.) A, B ve C kümelerinin eleman sayıları sırasıyla $12, 8$ ve 10 dur. Ayrıca B ile C ayrık kümelerdir. Buna göre $(A \times B) \cap (A \times C)$ kaç elemanlıdır.?

⊗ Sıfır ○ 180 ○ 24 ○ 12 ○ Hiçbiri

6.) $A \times B \neq \emptyset$ ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

○ $A \cap B \neq \emptyset$ ○ $A \triangle B \neq \emptyset$ ○ $A \subseteq B$ ○ $A \cap B = \emptyset$ ⊗ Hiçbiri

(Doğru Cevap: $A \cup B \neq \emptyset$ olabilir.)

7.) Her A, B, C için $p : A' \times B' = (A \times B)'$ ve $q : A \times C \subseteq B \times C \Longrightarrow A \subseteq B$ önermeleri için hangisi doğrudur?

○ p, q:Doğru ○ p : Doğru, q : Yanlış ○ p : Yanlış, q : Doğru ⊗ p, q : Yanlış ○ Hiçbiri

8.) $A \times B = \emptyset$ ise aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

○ $A = \emptyset$ ○ $A = \emptyset$ ve $B = \emptyset$ ⊗ $A \cap B = \emptyset$ ○ $B' = E$ ○ Hiçbiri

9.) $X \times Y = Y \times X$ olması için gerek ve yeter şart nedir?

⊗ $X = \emptyset$ veya $Y = \emptyset$ veya $X = Y$ ○ $X \subseteq Y$ veya $Y \subseteq X$ ○ $X = Y$ ○ $s(X) = s(Y)$ ○ Hiçbiri

Bağıntı

Tanım 3.7 A ve B birer küme olsun. $A \times B$ nin bir alt kümesine (boş küme dahil) A'dan B'ye bir ***bağıntı*** denir. Eğer $A = B$ ise bu bağıntıya kısaca kısaca ***A'da bir bağıntı*** denir.

Örnek 3.8 $A = \{ a, b, c, d, e \}$ ve $B = \{ 1, 2, 4, 6 \}$ olsun.

$$\beta_1 = \{ (a,2), (a,4), (b,1), (d,1), (c,6) \} \subseteq A \times B \text{ olup } A \text{ dan } B\text{'ye bir bağıntıdır}$$
$$\beta_2 = \{ (a,b), (b,b), (c,e) \} \subseteq A \times A \quad \text{ olup } A\text{'da bir bağıntıdır}$$

Tanım 3.9 β, A'dan B'ye bir bağıntı olsun. (Yani $\beta \subseteq A \times B$ olsun).

$$\boxed{\beta^{-1} = \{ (y,x) : (x,y) \in \beta \}}$$

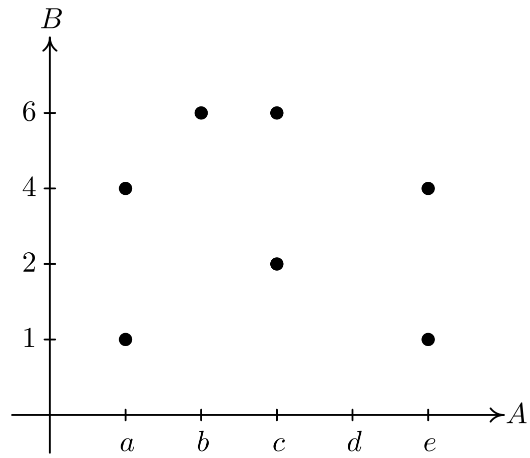
bağıntısına β'nın ***ters bağıntısı*** veya kısaca ***tersi*** denir. Bu durumda $\beta^{-1} \subseteq B \times A$ olduğu açıktır.

Tanım 3.10 $\beta \subseteq A \times B$ olsun. Bir kartezyen düzlemde A'nın elemanlarını yatay eksende; B'nin elemanlarını da düşey eksende gösterelim. $(x,y) \in \beta$ ise $P(x,y)$ noktalarını işaretleyelim. Bu şekilde elde edilen noktalar kümesine β'nın ***grafiği*** denir. Ayrıca; A ve B kümelerini Venn şeması ile yanyana gösterelim. $(x,y) \in \beta$ ise x'den y'ye tek yönlü oklar çizelim. Böylece elde edilen şekle β'nın ***şeması*** denir.

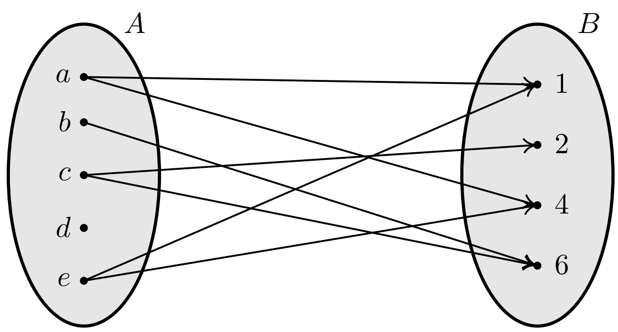
Örnek 3.11 $A = \{ a, b, c, d, e \}$ ve $B = \{ 1, 2, 4, 6 \}$ olsun.

$$\beta = \{ (a,1), (a,4), (b,6), (c,6), (c,2), (e,1), (e,4) \}$$

bağıntısını grafiğini ve şemasını çizelim.



Şekil 3.1: β'nın grafiği.



Şekil 3.2: β'nın şeması.

Tanım 3.12 A, B, C, D dört tane küme ve $B \cap C \neq \emptyset$ olsun. $\beta \subseteq A \times B$ ve $\gamma \subseteq C \times D$ olsun. β ile γ'nın ***bileşkesi*** $\gamma_\circ\beta$ ile gösterilir ve şöyle tanımlanır:

$$\boxed{\gamma_\circ\beta = \{\, (x, z) : \exists\, y \in B \text{ için } (x, y) \in \beta \text{ ve } (y, z) \in \gamma \,\}.}$$

Dikkat: β ile γ'nın bileşkesi, söylendiği sırada değil de $\gamma_\circ\beta$ şeklinde yazılmaktadır.

Örnek 3.13 $A = \{\, 2, 4, 6, 8 \,\}, B = \{\, a, b, c, d \,\}, C = \{\, c, d, e \,\}, D = \{\, 1, 3, 5 \,\}$ olsun.

$$\begin{aligned} &\beta = \{\, (2, a), (2, c), (6, c), (8, d), (2, e) \,\} \subseteq A \times B, \\ &\gamma = \{\, (c, 1), (d, 3), (c, 5), (e, 1) \,\} \subseteq C \times D \\ \Longrightarrow\ &\gamma_\circ\beta = \{\, (2, 1), (6, 1), (6, 5), (8, 3), (2, 5) \,\} \end{aligned}$$

Bağıntının Özellikleri

Bu kısımda özelliği incelenecek bağıntıların bir A kümesinde tanımlı olduğunu kabul edeceğiz. (Yani $\beta \subseteq A \times A$). Şimdi bu 4 özelliği tanımlayalım.

Tanım 3.14 $\beta \subseteq A \times A$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $(x, x) \in \beta$ ise β'ya ***yansıyan*** bir bağıntı denir.

Örnek 3.15 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun.

$\alpha_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 1)\}$ Yansıyandır

$\alpha_2 = \{(1, 4), (4, 2), (2, 2), (4, 4), (5, 5)\}$ Yansıyan değildir

Not: $(x, y) \in \beta$ önermesi $x\beta y$ şeklinde daha kısa gösterilmektedir. (Bazı kaynaklarda $y\beta x$ yazılmaktadır.) Bu durumda

$$\boxed{\beta \text{ yansıyan} \iff \forall x \in A, x\beta x}$$

olduğu görülebilir.

Tanım 3.16 A bir küme ise $x \in A$ için (x, x) şeklindeki bütün sıralı ikililerin kümesine A'nın ***köşegeni*** denir ve I_A ile gösterilir. O halde:

$$\boxed{I_A = \{(x, x) : x \in A\} \quad \text{dır.}}$$

Bu durumda da

$$\boxed{\beta \text{ yansıyan} \iff I_A \subseteq \beta}$$

olduğu kolaylıkla anlaşılır.

Tanım 3.17 $\beta \subseteq A \times A$ olsun. Eğer her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \in \beta$ ise β'ya ***simetrik*** bir bağıntı denir. Buradan

$$\boxed{\beta \text{ simetrik} \iff \beta = \beta^{-1}}$$

olduğu görülebilir.

Örnek 3.18 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun.

$\beta_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ Simetriktir

$\beta_2 = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$ Simetriktir

$\beta_3 = \{(1, 5), (3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$ Simetrik değildir

$\beta_4 = \emptyset$ Simetriktir

Tanım 3.19 $\beta \subseteq A \times A$ olsun. $x \neq y$ olmak üzere, eğer her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \notin \beta$ ise β'ya ***ters simetrik*** bir bağıntı denir. Buna denk olarak

$$\forall (x, y) \in \beta, (y, x) \in \beta \Longrightarrow x = y$$

önermesi doğruysa β simetriktir diyebiliriz. Buradan

$$\boxed{\beta \text{ ters simetrik} \iff \beta \cap \beta^{-1} \subseteq I_A}$$

olduğu görülebilir.

Örnek 3.20 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun.

$\gamma_1 = \{(4, 4), (2, 2), (3, 3)\}$	Simetrik ve ters simetrik
$\gamma_2 = \{(1, 3), (3, 1), (4, 5)\}$	Simetrik değil, ters simetrik değil
$\gamma_3 = \{(1, 5), (5, 1)\}$	Simetrik, ters simetrik değil
$\gamma_4 = \{(1, 3), (4, 5)\}$	Simetrik değil, ters simetrik
$\gamma_5 = \emptyset$	Simetrik ve ters simetrik

Tanım 3.21 $\beta \subseteq A \times A$ olsun. Eğer her $(x, y) \in \beta$ ve $(y, z) \in \beta$ için $(x, z) \in \beta$ ise β'ya ***geçişken*** bir bağıntı denir. Buradan

$$\boxed{\beta \text{ geçişken} \iff \beta_\circ\beta \subseteq \beta}$$

olduğu görülebilir.

Örnek 3.22 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun.

$\sigma_1 = \{(1, 1), (3, 4)\}$	Geçişken
$\sigma_2 = \{(1, 3), (3, 1), (1, 1)\}$	Geçişken değil, çünkü $(3, 3) \notin \sigma_2$
$\sigma_3 = \{(2, 3), (3, 5), (2, 5), (5, 3), (5, 5), (3, 3)\}$	Geçişken
$\sigma_4 = \{(1, 3), (4, 5), (5, 1)\}$	Geçişken değil, çünkü $(4, 1) \notin \sigma_4$
$\sigma_5 = \emptyset$	Simetrik, ters sim. ve geçişken

Örnek 3.23 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinde sırasıyla; sadece yansıyan, sadece simetrik, sadece ters simetrik, sadece geçişken olan birer bağıntı yazın. Daha sonra 4 özelliğe de sahip olan ve hiçbir özelliğe

sahip olmayan bağıntıları yazın.

$$\begin{aligned}
\text{Sadece yansıyan:}\quad & \beta_1 = \{\,(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(3,4),(4,3),(3,5)\,\}\\
\text{Sadece simetrik:}\quad & \beta_2 = \{\,(1,2),(2,1)\,\}\\
\text{Sadece ters simetrik:}\quad & \beta_3 = \{\,(1,2),(2,3))\,\}\\
\text{Sadece geçişken:}\quad & \beta_4 = \{\,(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(4,5)\,\}\\
\text{Bütün özellikler var:}\quad & \beta_5 = \{\,(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\,\} = I_A\\
\text{Hiçbir özellik yok:}\quad & \beta_6 = \{\,(1,2),(2,1),(1,1),(3,4)\,\}
\end{aligned}$$

Örnek 3.24 Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$'de "$a\beta b \iff 3\big|(a+2b)$" şekline tanımlanan bağıntının özelliklerini inceleyin.

Çözüm: **(i)** Her $a \in \mathbb{Z}$ için $3\big|(a+2a)$ yani $3\big|3a$ olup $a\beta a$ dır. Yani bağıntı yansıyandır.

(ii) $(a,b) \in \beta \Longrightarrow 3\big|(a+2b) \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, a+2b = 3k \Longrightarrow 2a+4b = 6k \Longrightarrow 2a+b = 6k-3b = 3(2k-b)$ olup $2k-b \in \mathbb{Z}$ olduğundan $3\big|(b+2a) \Longrightarrow (b,a) \in \beta$. Yani β simetriktir.

(iii) $(1,4) \in \beta$ ve $(4,1) \in \beta$ olduğundan β ters simetrik değildir.

(iv)

$$\begin{aligned}
(a,b) \in \beta \Longrightarrow 3\big(a+2b\big) \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, a+2b = 3k\\
(b,c) \in \beta \Longrightarrow 3\big(b+2c\big) \Longrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}, b+2c = 3m
\end{aligned}$$

Sağdaki eşitlikler taraf tarafa toplanıp gerekli düzenleme yapılırsa:

$$a+2c = 3(k+m-b) \Longrightarrow k+m+-b \in \mathbb{Z} \text{ olduğundan } 3\big|(a+2c) \Longrightarrow (a,c) \in \beta$$

olup β geçişkendir.

ALIŞTIRMALAR

1.) $\mathbb{Z}$'de tanımlanan "$a\beta b \iff b = a+1$" bağıntısının özelliklerinin listesi aşağıdakilerden hangisidir?

○ Ters simetri, geçişme ⊗ Ters simetri ○ Geçişme ○ Hiçbir öz. yok ○ Hiçbiri

2.) $\mathbb{N}$'de tanımlı $(x,y) \in \beta \iff$ "x asal veya $x \leqslant y$" bağıntısının özelliklerinin listesi nedir?

⊗ Yansıma ○ Yansıma ve geçişme ○ Hiçbir öz. yok ○ Yansıma ve ters simetri ○ Hiçbiri

3.) $\mathbb{N}^+$ kümesinde " $(a,b) \in \beta \iff a\big|2b$ " bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

○ Yansıyan değil ○ Simetrik ○ Ters simetrik ⊗ Geçişken değil ○ Hiçbiri

4.) $\mathbb{R}$ kümesinde " $(a,b) \in \beta \iff |a-b| = 1$ " bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

○ Yansıyan değil ○ Simetrik ○ Ters simetrik değil ○ Geçişken değil ⊗ Hiçbiri

5.) $A = \{1,2,3\}$ kümesi üzerinde yansıyan olan kaç tane bağıntı yazılabilir?

○ 32 tane ○ 16 tane ○ 512 tane ⊗ 64 tane ○ Hiçbiri

6.) $\alpha = \{(1,2),(2,5),(5,3),(3,4),(5,1)\}$ ve $\beta = \{(2,6),(1,6),(3,6),(4,1),(5,2)\}$ ise $s(\beta_o\alpha) = ?$

⊗ 4 ○ 2 ○ 3 ○ 1 ○ Hiçbiri

7.) "Yansıyan olmadığı halde kendisi ile bileşkesi yansıyan olan bağıntılar vardır" önermesi için aşağıdakilerden hangisi söylenebilir?

○ Yanlıştır ⊗ Doğrudur ○ Bir şey söylenemez ○ Önerme değildir ○ Hiçbiri

8.) $A = \{1,2,3\}$'nın kuvvet kümesi üzerinde $\beta = \{(X,Y) : X \neq Y, X \subseteq Y\}$ bağıntısı kaç elemanıdır?

○ 12 ○ 17 ○ 16 ○ 13 ⊗ Hiçbiri

9.) $\mathbb{N}$ de "$(a,b) \in \beta \iff a$ asal veya b asal veya $a+b$ asal " şeklinde tanımlanan bağıntının özelliklerinin listesi hangisidir?

○ Geçişken ⊗ Simetrik ○ Geçişken ve simetrik ○ Hiçbir özellik yok ○ Hiçbiri

10.) $A = \{0,1,\ldots,8\}$ kümesinde $a\beta b \iff |b^2 - a^2| < 64$ bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

○ Yansıyan değil ○ Simetrik değil ○ Ters simetrik ⊗ Geçişken değil ○ Hiçbiri

11.) 2 elemanlı bir küme üzerinde simetrik olmayan kaç tane bağıntı yazılır?

○ 4 tane ○ 5 tane ○ 6 tane ○ 7 tane ⊗ Hiçbiri

12.) Bir A kümesinde tanımlı bir β bağıntısının geçişken olması için gerek ve yeter şart nedir?

⊗ $\beta_o\beta \subseteq \beta$ ○ $\beta \cup \beta^{-1} \subseteq I_A$ ○ $\beta \cap \beta^{-1} \subseteq I_A$ ○ $\beta_o\beta^{-1} = I_A$ ○ Hiçbiri

13.) $E = \{a,b,c\}$ evrensel küme olsun. $P(E)$ kuvvet kümesi üzerinde $\beta = \{(X,Y) : X = Y'\}$ bağıntısı kaç elemanlıdır?

○ 5 elemanlı ○ 6 elemanlı ○ 9 elemanlı ○ 10 elemanlı ⊗ Hiçbiri

14.) $\alpha = \{(1,2),(2,4),(3,4),(1,4),(2,3)\}$ ve $\gamma = \{(4,1),(3,3),(1,2)\}$ ise $\alpha_\circ\gamma$ kaç elemanlıdır?

○ 3 elemanlı ○ 4 elemanlı ⊗ 5 elemanlı ○ 6 elemanlı ○ Hiçbiri

15.) Pozitif doğal sayılar kümesi üzerinde $a\beta b \iff 3|(a+3)$ bağıntısı için hangisi doğrudur?

○ Yansıyan ○ Simetrik ○ Ters simetrik ⊗ Geçişken ○ Hiçbiri

16.) $\mathbb{Z}$'de tanımlı $(x,y) \in \beta \iff$ "$x+y$ çift veya x tek" bağıntısının özelliklerinin listesi nedir?

⊗ Yansıyan, geçişken ○ Yansıyan, simetrik ○ Yansıyan ○ Yansıyan, ters simetrik ○ Hiçbiri

17.) β'da var iken $\beta_\circ\beta$'da da olması gereken özelliklerin listesi hangisidir?

○ Yansıma ○ Yansıma, simetri ⊗ Yansıma, simetri, geçişme ○ Yansıma, geçişme ○ Hiçbiri

18.) $\mathbb{R}$'de tanımlı $(x,y) \in \beta \iff$ "x tamsayı veya $y < 0$ " bağıntısının özelliklerinin listesi nedir?

○ Geçişken ○ Simetrik, geçişken ⊗ Hiçbir öz. yok ○ Ters simetrik ○ Hiçbiri

19.) $\mathbb{N}^+$ kümesinde " $(a,b) \in \beta \iff a \leqslant 2b$ " bağıntı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

○ Yansıyan değil ○ Simetrik ○ Ters simetrik ⊗ Geçişken değil ○ Hiçbiri

20.) $\mathbb{N}^+$ kümesinde " $(a,b) \in \beta \iff a < b$ veya $b|a$ " bağıntı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

○ Yansıyan değil ○ Simetrik ○ Ters simetrik ⊗ Geçişken değil ○ Hiçbiri

21.) Bir bağıntı simetrik ise bu bağıntının tersi için aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

○ Yansıyandır ○ Ters simetriktir ⊗ Simetriktir ○ Geçişkendir ○ Hiçbiri

22.) $A = \{a, b\}$ kümesi üzerinde simetrik olup ters simetrik olmayan kaç tane bağıntı yazılabilir?

○ Yazılamaz ○ 2 ○ 3 ⊗ 4 ○ Hiçbiri

23.) $\alpha = \{(2,4),(7,1),(6,6),(6,4),(7,4),(4,1)\}$ ve $\beta = \{(1,2),(2,6),(3,4),(1,7),(2,7)\}$ ise $\alpha_\circ\beta$ kaç elemanlıdır?

○ 4 elemanlı ○ 5 elemanlı ⊗ 6 elemanlı ○ 7 elemanlı ○ Hiçbiri

24.) $\alpha = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}, x+y=1\}$ ve $\beta = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}, x-y=3\}$ ise $\beta_\circ\alpha = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}, \ldots\ldots\}$ kümesindeki boşluğa ne yazılmalıdır?

○ $x-y=1$ ○ $x+y=4$ ○ $x+y=0$ ⊗ $x+y=-2$ ○ Hiçbiri

25.) A en az iki elemalı bir küme ve $\alpha = A \times A$ ise α için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

○ Yansıyandır ⊗ Ters simetriktir ○ Simetriktir ○ Geçişkendir ○ Hiçbiri

26.) $\mathbb{N}$ kümesinde $(a,b) \in \beta \iff$ "$a+b$ çift veya a asal" bağıntısı için hangisi doğrudur?

○ Yansıyan değil ○ Simetrik ○ Ters simetrik ⊗ Geçişken ○ Hiçbiri

27.) $\mathbb{N} \setminus \{0\}$'da $x\beta y \iff x \mid (x+y)$ bağıntısının sahip olduğu özelliklerin listesi hangisidir?

○ Yansıyan ve geçişken ○ Yansıyan ve ters sim. ○ Yansıyan ve simetrik ⊗ Yansıyan ○ Hiçbiri

28.) Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$'de $x\beta y \iff |x-y| \leqslant 1$ bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

⊗ Geçişken değil ○ Ters simetrik ○ Simetrik değil ○ Yansıyan değil ○ Hiçbiri

29.) $\mathbb{Z}$'de $(x,y) \in \beta \iff 3 \mid y^2$ bağıntısının sahip olduğu özelliklerin listesi hangisidir?

○ Ters simetrik ○ Ters simetrik ve geçişken ⊗ Geçişken ○ Simetrik ve geçişken ○ Hiçbiri

30.) $\mathbb{R}$'de $a\beta b \iff |a^3 - b^3| \leqslant 8$ bağıntısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

○ Yansıyan değil ○ Simetrik değil ○ Ters simetrik ○ Geçişken ⊗ Hiçbiri

Bölüm 4

Denklik Bağıntıları

Tanım 4.1 β bir $\emptyset \neq A$ kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer β yansıyan, simetrik ve geçişken ise β'ya bir ***denklik bağıntısı*** denir.

Örnek 4.2 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi üzerinde

$$\beta = \{ (x, y) : x - y \text{ çift tamsayıdır} \}$$

şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Çünkü

(i) Her $x \in \mathbb{Z}$ için $x - x = 0$ çift olup $x\beta x$ dir. Yani β yansıyandır.

(ii) $(x, y) \in \beta \Longrightarrow x - y$ çift $\Longrightarrow y - x = -(x - y)$ çift olup $(y, x) \in \beta$. Yani β simetriktir.

(iii) $(x, y) \in \beta$ ve $(y, z) \in \beta \Longrightarrow x - y = 2k_1, y - z = 2k_2$ olacak şekilde k_1, k_2 tamsayısı var $\Longrightarrow x - z = 2(k_1 + k_2)$ çift olup $(x, z) \in \beta \Longrightarrow \beta$ geçişkendir.

Tanım 4.3 β bir A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $(x, y) \in \beta$ ise y elemanı x elemanına (β bağıntısına göre) ***denktir*** denir. x elemanına denk olan bütün elemanların kümesine x'in ***denklik sınıfı*** denir ve $\overline{x}$ ile gösterilir. O halde

$$\overline{x} = \{ y \in A : (x, y) \in \beta \} = \{ y \in A : x\beta y \} .$$

Örnek 4.4 Tamsayılar kümesinde

$$\beta = \{ (x, y) : 3 \mid (x - y) \}$$

şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Buna göre

$$\begin{aligned}
\overline{4} &= \{\, y \in \mathbb{Z} : 3 \,|\, (4-y) \,\} = \{\, \ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots \,\}, \\
\overline{0} &= \{\, y \in \mathbb{Z} : 3 \,|\, (0-y) \,\} = \{\, \ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots \,\}, \\
\overline{1} &= \{\, y \in \mathbb{Z} : 3 \,|\, (1-y) \,\} = \{\, \ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots \,\}, \\
\overline{2} &= \{\, y \in \mathbb{Z} : 3 \,|\, (2-y) \,\} = \{\, \ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots \,\}, \\
\overline{-1} &= \{\, y \in \mathbb{Z} : 3 \,|\, (1+y) \,\} = \{\, \ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots \,\},
\end{aligned}$$

yazabiliriz. İki denklik sınıfının ya birbirine eşit ya da ayrık olduğu görülür. Ayrıca farklı denklik sınıfları $\overline{0}, \overline{1}$ ve $\overline{2}$ dir. Bu denklik sınıflarının birleşimi de $\mathbb{Z}$ ye eşittir.

Teorem 4.5 β bir A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.

(i) Her $a \in A$ için $\overline{a} \neq \emptyset$,

(ii) Her $a, b \in A$ için ya $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$ veya $\overline{a} = \overline{b}$,

(iii) A daki elemanların denklik sınıflarının birleşimi A yı verir. Yani $A = \bigcup\limits_{a \in A} \overline{a}$.

İspat (i) Bağıntı yansıyan olduğundan her $a \in A$ için $a \in \overline{a}$ olup $\overline{a} \neq \emptyset$ dir.

İspat (ii) $a, b \in A$ olsun. $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$ ise ispat biter. $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\overline{a} = \overline{b}$ olduğunu göstereceğiz. $c \in \overline{a} \cap \overline{b}$ alalım. O halde $c \in \overline{a}$ ve $c \in \overline{b}$ dir. Şimdi

$$x \in \overline{a} \Longrightarrow (x, a) \in \beta \Longrightarrow (x, c) \in \beta, \text{ çünkü } (a, c) \in \beta \text{ ve } \beta \text{ geçişken.}$$

Ayrıca $(c, b) \in \beta$ olduğundan $(x, b) \in \beta$ elde edilir. O halde $x \in \overline{b}$ elde edilir. Benzer şekilde $x \in \overline{b} \Longrightarrow x \in \overline{a}$ ispatlanabilir. O halde $\overline{a} = \overline{b}$ dir.

İspat (iii) A daki her eleman bir denklik sınıfına ait olacağından ispat açıktır. □

Tanım 4.6 β bir A kümesinde bir denklik bağıntısı olsun. β nın A da belirlediği (ayırdığı) denklik sınıflarının kümesine A nın β ya göre ***bölüm kümesi*** denir ve A/β ile gösterilir. Yani

$$A/\beta = \{\, \overline{a} : a \in A \,\}.$$

Örnek 4.7 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinde $\beta = \{\, (x, y) : 3 \,|\, (x-y) \,\}$ denklik bağıntısı verilsin. Buna göre

$$\mathbb{Z}/\beta = \left\{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2} \right\}.$$

Tanım 4.8 A boş olmayan bir küme olsun. $\mathcal{A} = \{\, A_i : i \in I \,\}$ ailesi verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\mathcal{A}$ ailesine A kümesinin bir ***parçalanışı (ayrımı)*** denir.

(i) Her $i \in I$ için $A_i \neq \emptyset$,

(ii) Her $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$, (Yani A_i ler ikişer ikişer ayrık)

(iii) $\mathcal{A}$ ailesinin birleşimi A ya eşit; yani

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A.$$

Örnek 4.9 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinin iki ayrımı:

$$\mathcal{A} = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{6, 8\}, \{7\}\}, \quad \mathcal{B} = \{\{1\}, \{2\}, \{6\}, \{3, 4, 5, 7, 8\}\},$$

Ayrıca $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\} = \{A\}$ ailesi de A nın bir ayrımıdır.

Teorem 4.10 β bir A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. β nın A da ayırdığı denklik sınıfları (yani A/β) A nın bir ayrımını oluşturur. Tersine A nın herbir ayrımı, verilen ayrımdaki her küme bir denklik sınıfı olacak şekilde bir (ve sadece bir) denklik bağıntısı belirler.

İspat: A/β nın A nın bir ayrımını oluşturduğu Teorem 4.5 de ispatlanmıştır. Şimdi A nın bir $\mathcal{A}$ ayrımı verilsin.

$$\beta = \left\{ (x, y) : \text{“}x \text{ ile } y, \mathcal{A} \text{ ayrımındaki aynı kümeye aittir”} \right\}$$

şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır ve $A/\beta = \mathcal{A}$ dır. □

Örnek 4.11 $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ kümesinin bir ayrımı $\mathcal{A} = \{\{a, e\}, \{b, c, d, f\}, \{g\}\}$ olarak verilsin. Bu ayrımın belirlediği denklik bağıntısı:

$$\beta = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f)(g, g), (a, e), (e, a), (b, c), (c, b),$$
$$(b, d), (d, b), (b, f), (f, b), (c, d), (d, c), (c, f), (f, c), (d, f), (f, d)\}.$$

Gerçekten de β nın bir denklik bağıntısı olduğu ve $A/\beta = \left\{ \overline{a}, \overline{b}, \overline{g} \right\} = \mathcal{A}$ olduğu görülür.

Not 4.12 Denklik bağıntıları için genelde $\sim, \simeq, \approx, \cong, \equiv$ gibi semboller kullanılır. Eğer böyle bir sembol kullanılmışsa $(x, y) \in \sim$ yerine $x \sim y$ kullanmak daha kullanışlıdır. Bağıntı simetrik olduğu için $y \sim x$ ile $x \sim y$ aynıdır.

ALIŞTIRMALAR

1.) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinde $\beta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (3, 1)\}$ bağıntısı veriliyor. β denklik bağıntısı ise belirlediği ayrımı bulunuz.

2.) $\mathbb{Z}$ de $x \sim y \iff x^2 + y = x + y^2$ şeklinde bir bağıntı tanımlanıyor. $\sim$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterip $-3, 4, -4$ ve 5'in denklik sınıflarını bulunuz.

3.) $\mathbb{N}$ de $x\beta y \iff x^2+x=y^2+y$ şeklinde bir bağıntı tanımlanıyor. β bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterip $1,3$ ve 5'in denklik sınıflarını bulunuz.

4.) $\mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+$ kümesinde $(x_1,y_1)\equiv(x_2,y_2) \iff x_1y_2=y_1x_2$ şeklinde bir bağıntı tanımlanıyor. $\equiv$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterip $(1,2)$ ve $(2,3)$'ün denklik sınıflarını bulunuz.

5.) $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinde $(a,b)\cong(c,d) \iff a+d=b+c$ şeklinde bir bağıntı tanımlanıyor. $\cong$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterip $(2,5)$'in denklik sınıfını bulunuz.

6.) $\mathbb{Z}$ kümesinde $x\equiv y \pmod 5$ bağıntısı veriliyor. Bu bağıntının denklik bağıntısı olduğunu gösterip $\mathbb{Z}/\equiv$ bölüm kümesini yazınız.

7.) $A=\{1,2,3,4,5\}$ kümesinin $\mathcal{A}=\{\{1,3,5\},\{2,4\}\}$ ayrımının belirlediği bağıntıyı yazınız.

8.) A kümesinde tanımlı β_1 ve β_2 denklik bağıntıları verilsin. $\beta_1\cap\beta_2$ her zaman bir denklik bağıntısı mıdır? $\beta_1\cup\beta_2$ her zaman bir denklik bağıntısı mıdır? Gösterin.

9.) $\mathbb{R}$ de $x\beta y \iff x^3+y=y^3+x$ ile tanımlanan β bağıntısı bir denklik bağıntısı mıdır? Eğer denklik bağıntısı ise $\overline{0}$ ve $\overline{2}$ denklik sınıflarını bulunuz.

10.) Bir P kümesinin bir ayrımı $\{A_1,A_2,A_3\}$ olduğuna göre $\{A_1\times Q, A_2\times Q, A_3\times Q\}$ kümesinin $P\times Q$ kümesinin bir ayrımı olduğunu gösteriniz. ($Q\neq\emptyset$ dir.)

11.) $\mathbb{R}$'de tanımlanan $x\beta y \iff x^2-y^2=2(y-x)$ bağıntısı bir denklik bağıntısı mıdır? Denklik bağıntısı ise $\overline{0}$ ve $\overline{1}$ denklik sınıflarını bulunuz.

12.) $\mathbb{Z}$'de $a\beta b \iff 3|(a+2b)$ ile tanımlanan bağıntı denklik bağıntısı mıdır? Gösteriniz.

13.) $\mathbb{Z}$'de $a\beta b \iff 3|(5a+b)$ ile tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısı mıdır? Denklik bağıntısı ise $\overline{0}$ ve $\overline{1}$ denklik sınıflarını bulunuz.

14.) $\mathbb{Z}$ de $m\sim n \iff m^2-n^2=n-m$ ile tanımlanan bağıntı denklik bağıntısı mıdır? Denklik bağıntısı ise $\overline{-2}$ ve $\overline{3}$ denklik sınıflarını bulunuz.

15.) $\mathbb{Z}$'de $x\beta y \iff x^2-2y=y^2-2x$ ile tanımlanan bağıntı denklik bağıntısı mıdır? Denklik bağıntısı ise $\overline{6}$ ve $\overline{-3}$ denklik sınıflarını bulunuz. Hangi $x\in\mathbb{Z}$ için $\overline{x}$ sadece bir elemanlıdır? (Nasıl bulduğunuzu gösteriniz.)

16.) $\mathbb{R}$ de $x\beta y \iff |x-y|\leqslant 1$ ile tanımlanan β bağıntısı bir denklik bağıntısı mıdır? Denklik bağıntısı ise $\overline{0}$ ve $\overline{-2}$ denklik sınıflarını bulunuz?

17.) $\mathbb{Z}$'de $x\beta y \iff x^3+5y=y^3+5x$ ile tanımlanan bağıntı denklik bağıntısı mıdır? Denklik bağıntısı ise $\overline{0}$ ve $\overline{5}$ denklik sınıflarını bulunuz.

18.) $\mathbb{R}$ de $x\beta y \iff x^2-y^2=8x-8y$ ile tanımlanan β bağıntısı bir denklik bağıntısı mıdır? Denklik bağıntısı ise $\overline{0}$ ve $\overline{-2}$ denklik sınıflarını bulunuz? Hangi $a\in\mathbb{R}$ için $\overline{a}$ bir elemanlıdır.

19.) A ve B boş olmayan iki küme olsun. Hiçbir elemanı boş olmayan $\{A\setminus B, B\setminus A, A\cap B\}$ ailesinin $A\cup B$ nin bir ayrımı (ayrışımı) olduğunu gösteriniz.

20.) $\mathbb{R}$ de $x\beta y \iff x^2 + 7y = y^2 + 7x$ ile tanımlanan β bağıntısı bir denklik bağıntısı mıdır? Denklik bağıntısı ise $\overline{0}$ ve $\overline{-3}$ denklik sınıflarını bulunuz? Hangi $a \in \mathbb{R}$ için $\overline{a}$ bir elemanlıdır.

21.) $\mathbb{Z}$ de $x\beta y \iff |x^2 - y^2| \leqslant 5$ ile tanımlanan β bağıntısı bir denklik bağıntısı mıdır? Denklik bağıntısı ise $\overline{2}$ ve $\overline{-3}$ denklik sınıflarını bulunuz?

22.) $\mathbb{R}$ de $x\beta y \iff y^2 - x^2 = x^3 - y^3$ ile tanımlanan β bağıntısı bir denklik bağıntısı mıdır? Denklik bağıntısı ise $\overline{0}$ ve $\overline{2}$ denklik sınıflarını bulunuz?

23.) 3 elemanlı bir A kümesi üzerinde kaç tane farklı denklik bağıntısı yazılabilir?

○ 7 ○ 8 ○ 9 ○ 18 ⊗ Hiçbiri

24.) $\{\{1,5\},\{2,3,4\},\{6\},\{7\}\}$ ayrımının belirlediği denklik bağıntısı kaç elemanlıdır?

○ 12 ○ 13 ○ 14 ⊗ 15 ○ Hiçbiri

25.) 4 elemanlı bir A kümesi üzerinde 6 elemanlı kaç tane denklik bağıntısı yazılabilir?

○ 3 ○ 4 ⊗ 6 ○ 8 ○ Hiçbiri

26.) $\beta = \{(1,1),\ldots,(8,8),(1,2),(2,1),(1,7),(7,1),(2,7),(7,2)\}$ bağıntısında kaç tane farklı denklik sınıfı vardır?

○ 4 ○ 5 ⊗ 6 ○ 7 ○ Hiçbiri

27.) $\mathbb{R}$'de $x\beta y \iff x^2 + 7y = y^2 + 7x$ denklik bağıntısı ise $\sqrt{2}$ nin denklik sınıfı nedir?

○ $\{\sqrt{2}\}$ ○ $\{\sqrt{2}, \sqrt{2}-7\}$ ○ $\{\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$ ⊗ $\{\sqrt{2}, 7-\sqrt{2}\}$ ○ Hiçbiri

28.) $\mathbb{R}$ de $x\beta y \iff x^2 = y^2$ denklik bağıntısına göre hangi sayının (sayıların) denklik sınıfı bir elemanlıdır?

○ $\mp\sqrt{2}$ ○ -1 ○ 1 ○ 2 ⊗ Hiçbiri

29.) $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinde $x\beta y \iff$ "$x = y$ veya $x + y = 6$" denklik bağ. tanımlansın. Buna göre A/β kaç elemanlıdır?

○ 3 ⊗ 4 ○ 2 ○ 5 ○ Hiçbiri

30.) $A = \{1,2,3,4\}$ kümesinde tanımlı bir denklik bağıntısının eleman sayısı aşağıdakilerden hangisi <u>olamaz</u>?

○ 16 ○ 4 ○ 6 ○ 8 ⊗ Hiçbiri

31.) $\mathbb{R}$ de $(x,y) \in \beta \iff x^3 - y^3 = x - y$ şeklinde tanımlanan β bir denklik bağıntısı ise $\overline{0}$ kaç elemanlıdır?

○ β denklik bağıntısı değil ○ 1 ○ 2 ⊗ 3 ○ Hiçbiri

Bölüm 5

Sıralama Bağıntıları

Tanım 5.1 β bir $\emptyset \neq A$ kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer β yansıyan, ters simetrik ve geçişken ise β'ya bir ***parçalı sıralama bağıntısı*** veya kısaca ***sıralama bağıntısı*** denir. A kümesine de ***(parçalı) sıralanmış küme*** denir. Sıralama bağıntıları genelde $\leqslant, \lesssim, \lessapprox, \preccurlyeq, \precsim$ gibi sembollerle gösterilir. Ayrıca $(x, y) \in \lesssim$ ise bunu kısaca $x \lesssim y$ şeklinde yazar ve "$\lesssim$ bağıntısına göre x, y den önce gelir" veya kısaca "x, y den önce gelir" şeklinde okuruz. Ayrıca "y, x den sonra gelir" ifadesi de kullanılabilir. Bu gösterim şeklinin, daha önce $(x, y) \in \beta$ yerine $x\beta y$ yazılan gösterim şekliyle uyumlu olduğuna dikkat ediniz.

Tanım 5.2 $\lesssim$ bağıntısı bir A kümesinde bir sıralama bağıntısı olsun. Eğer $x, y \in A$ için $x \lesssim y$ veya $y \lesssim x$ ise x ile y elemanlarına ***karşılaştırılabilir elemanlar*** denir. Eğer A nın bütün elemanları $\lesssim$ bağıntısına göre karşılaştırılabilir elemanlar ise; yani

$$\forall\, x, y \in A, x \lesssim y \text{ veya } y \lesssim x$$

önermesi doğruysa, $\lesssim$ bağıntısına bir ***tam sıralama bağıntısı***, A kümesine de ***tam sıralanmış küme*** denir.

Örnek 5.3 Doğal sayılar kümesinde bilinen $\leqslant$ bağıntısını düşünelim. Bu bağıntı bir sıralama bağıntısıdır. Çünkü, her $x \in \mathbb{N}$ için $x \leqslant x$ olup $\leqslant$ yansıyandır. Ayrıca, $x \leqslant y, y \leqslant x$ ise $x = y$ olup bağıntı ters simetriktir. $x \leqslant y, y \leqslant z$ iken $x \leqslant z$ olup bağıntı geçişkendir. Ayrıca her $x, y \in \mathbb{N}$ için $x \leqslant y$ veya $y \leqslant x$ olup bağıntı tam sıralama bağıntısıdır ve $\mathbb{N}$ tam sıralıdır.

Örnek 5.4 $A = \{\, a, b, c \,\}$ kümesinin kuvvet kümesi

$$P(A) = \{\, \emptyset, \{\, a \,\}, \{\, b \,\}, \{\, c \,\}, \{\, a, b \,\}, \{\, a, c \,\}, \{\, b, c \,\}, A \,\}$$

üzerinde tanımlanan "$\subseteq$" bağıntısını düşünelim. Bağıntı sıralama bağıntısıdır, çünkü:

(i) Her $X \in P(A)$ için $X \subseteq X$ olup bağıntı yansıyandır.

(ii) $X \subseteq Y$ ve $Y \subseteq X$ ise $X = Y$ olup bağıntı ters simetriktir.

(iii) $X \subseteq Y$ ve $Y \subseteq Z$ ise $X \subseteq Z$ olup bağıntı geçişkendir.

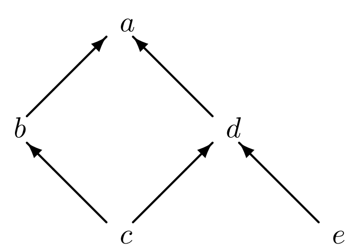
Bu bağıntı bir tam sıralama bağıntısı değildir, çünkü, örneğin, $\{a, b\}$ kümesi ile $\{b, c\}$ kümesi karşılaştırılamaz.

Tanım 5.5 Bir $\preccurlyeq$ sıralama bağıntısının şeması $x \preccurlyeq y$ ve $x \neq y$ için x den y ye yukarı yönde bir ok çizilerek elde edilen şekildir. Ayrıca $x \preccurlyeq y$ ve $y \preccurlyeq z$ ise x den z ye ok çizilmez. Yani $x \preccurlyeq y$ olması "x den y ye yukarı yönde okları takip ederek gidilebilir" anlamına gelmektedir.

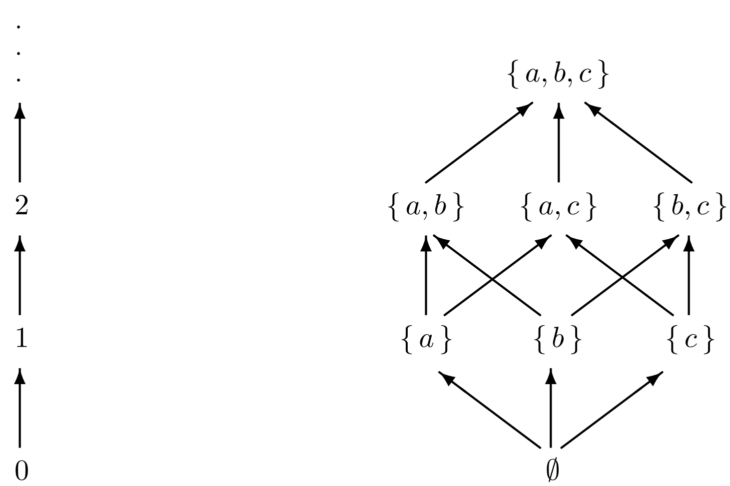
Örnek 5.6 $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde tanımlanan

$$\beta = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (c,d), (d,a), (c,a), (c,b), (b,a), (e,d), (e,a)\}$$

sıralama bağıntısının şeması:



Örnek 5.7 Daha önce verilen $\mathbb{N}$ deki bilinen $\leqslant$ sıralama bağıntısı ile $A = \{a, b, c\}$ kümesinin kuvvet kümesi üzerinde verilen $\subseteq$ sıralama bağıntılarının şemaları şöyledir:



Tanım 5.8 $\lesssim$ bağıntısı bir A kümesinde bir sıralama bağıntısı olsun. $a \in A$ olsun. Her $x \in A$ için

$$x \lesssim a \Longrightarrow x = a$$

önermesi doğru ise a elemanına ***bir küçük eleman (minimal eleman)*** denir. Yani A kümesinde a'dan önce gelen eleman sadece a ise a elemanına bir küçük eleman denir. Benzer şekilde bir $b \in A$ elemanından sonra gelen elemanlar sadece b'nin kendisi ise b'ye ***bir büyük eleman (maksimal eleman)*** denir. Yani, her $x \in A$ için

$$b \lesssim x \Longrightarrow x = b$$

önermesi doğru ise b'ye bir büyük eleman denir. Tanımdan da anlaşılacağı gibi bir sıralı kümede küçük ve büyük elemanlar birden fazla olabilir.

Tanım 5.9 $\lesssim$ bağıntısı bir A kümesinde bir sıralama bağıntısı olsun. $B \subseteq A$ olsun. Eğer her $x \in B$ için $b \lesssim x$ olacak şekilde bir $b \in B$ varsa b'ye B kümesinin ***en küçük elemanı (minimumu)*** denir. Benzer şekilde, eğer her $x \in B$ için $x \lesssim c$ olacak şekilde bir $c \in B$ varsa c'ye B kümesinin ***en büyük elemanı (maksimumu)*** denir. Yani bir kümenin en küçük (büyük) elemanı kümedeki bütün elemanlarla karşılaştırılan ve kümedeki her elemandan önce (sonra) gelen elemandır. Bu elemanlar sırasıyla $\min B$ ve $\text{maks}\, B$ ile gösterilir. Tanımdan da anlaşılacağı gibi bir kümenin en küçük ve en büyük elemanı (varsa) o kümeye ait olmak zorundadır.

Teorem 5.10 Bir $B \subseteq A$ kümesinin minimumu ve maksimumu varsa bir tanedir.

İspat: b_1 ve b_2, B kümesinin iki minimumu olsun. b_1 bir minimum olduğundan $b_1 \lesssim b_2$ dir. Ayrıca b_2 de bir mininum olduğundan $b_2 \lesssim b_1$ dir. $\lesssim$ bağıntısı ters simetrik olduğundan $b_1 = b_2$ elde edilir. Maksimumun (varsa) tek olduğu benzer şekilde ispatlanır. □

Örnek 5.11 $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ kümesinde $x \lesssim y \iff x|y$ sıralama bağıntısına göre A kümesindeki küçük elemanların kümesi $\{2,3,5,7\}$ ve büyük elemanların kümesi $\{6,7,8,9,10\}$ dur. A kümesinin en küçük ve en büyük elemanı yoktur. $\min\{2,4,8\} = 2$, $\text{maks}\{2,4,8\} = 8$ dir. $\min\{2,4,8,10\} = 2$ olup en büyük elemanı yoktur. $\{2,5,10\}$ kümesinin en küçük elemanı yoktur, ama $\text{maks}\{2,5,10\} = 10$ dur. Ne en küçük, ne de en büyük elemana sahip bir küme ise $\{3,5,6,10\}$ dur. Tek elemanlı bir $\{a\}$ kümesinin en küçük elemanı da en büyük elemanı da a dır.

Tanım 5.12 $\lesssim$ bağıntısı bir A kümesinde bir sıralama bağıntısı ve $B \subseteq A$ olsun. Bir $a_0 \in A$ ve her $x \in B$ için $a_0 \lesssim x$ oluyorsa a_0 elemanına B için bir ***alt sınır*** denir. Benzer şekilde, bir $a_1 \in A$ ve her $x \in B$ için $x \lesssim a_1$ oluyorsa a_1 elemanına B için bir ***üst sınır*** denir. Alt sınıra sahip kümelere ***alttan sınırlı küme***, üst sınıra sahip kümelere de ***üstten sınırlı küme*** denir. Eğer B alttan sınırlı bir küme ise, B nin bütün alt sınırlarının oluşturduğu kümenin en büyük elemanına (varsa) B nin ***en büyük alt sınırı (infimumu)*** denir ve $\inf B$ veya $\text{ebas}\, B$ ile gösterilir. Benzer şekilde, eğer B üstten sınırlı bir küme ise, B nin bütün üst sınırlarının oluşturduğu kümenin en küçük elemanına (varsa) B nin ***en küçük üst sınırı (supremumu)*** denir ve $\sup B$ veya $\text{eküs}\, B$ ile gösterilir. Tanımdan da anlaşılacağı gibi bir B kümesinin üst sınırı, alt sınırı, infimumu ve supremumu kümeye ait olmak zorunda değildir.

Teorem 5.13 Bir $B \subseteq A$ kümesinin infimumu ve supremumu varsa bir tanedir.

İspat: B kümesinin infimumu (supremumu) B nin alt (üst) sınırlarının maksimumu (minimumu) olduğundan ve bir kümenin maksimumu (minimumu) eğer varsa tek olduğundan (bkz. Teorem 5.10), B kümesinin infimumu (supremumu) varsa tektir.

Örnek 5.14 $A = \mathbb{R}$ alalım ve bilinen $\leqslant$ sıralamasını düşünelim. $B_1 = [0, \sqrt{3})$ olsun. Sıfır veya negatif bir sayı bu küme için bir alt sınırdır. Yani B_1 in alt sınırlarının kümesi $(-\infty, 0]$ olup bu kümenin maksimumu 0 olduğundan ebas $B_1 = 0$ dır. Benzer şekilde eküs $B_1 = \min[\sqrt{3}, \infty) = \sqrt{3}$ dür. Şimdi de B_2 kümesi olarak 0 dan büyük bütün rasyonel sayıları alalım. B_2 nin alt sınırlarının kümesi $(-\infty, 0]$ olup ebas $B_1 = 0$ dır. B_2 nin üst sınırlarının kümesi boşküme olup bu küme üstten sınırlı değildir o halde supremumu yoktur.

Tanım 5.15 A kümesi bir sıralı küme olsun. Eğer A nın boş olmayan her alt kümesinin bir en küçük elemanı varsa A ya ***iyi sıralanmış bir küme***, buradaki sıralama bağıntısına da bir ***iyi sıralama bağıntısı*** denir.

Örnek 5.16 $\mathbb{N}$ kümesi bilinen $\leqslant$ sıralama bağıntısına göre iyi sıralı bir kümedir, çünkü her alt kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ iyi sıralı değildir çünkü, örneğin, $\mathbb{Z}^-$ kümesinin bir en küçük elemanı yoktur. $\mathbb{R}$ de iyi sıralı değildir, çünkü $(0, 1)$ açık aralığının bir en küçük elemanı yoktur.

Teorem 5.17 İyi sıralı her A kümesi tam sıralıdır.

İspat: $x, y \in A$ olsun. A kümesi iyi sıralı olduğundan $\{ x, y \}$ alt kümesinin en küçük elemanı vardır. Bu eleman x ise $x \lesssim y$ olup x ile y karşılaştırılabilir. Aksi halde $y \lesssim x$ olup y ile x karşılaştırılabilir. Her iki halde de bu iki eleman karşılaştırılır. O halde A tam sıralıdır. □

ALIŞTIRMALAR

1.) A kümesi 30 sayısının pozitif bölenleri olsun. A üzerinde "$x \lesssim y \iff x|y$" sıralama bağıntısı verilsin. A kümesi bu bağıntıya göre tam sıralı mıdır? İyi sıralı mıdır? $B = A \setminus \{ 1, 30 \}$ kümesinin en küçük ve en büyük elemanı var mıdır? eküs$\{ 3, 5 \} =?$, ebas$\{ 3, 5 \} =?$

2.) **a)** İyi sıralı bir kümenin her alt kümesinin iyi sıralı olduğunu gösterin.

b) Tam sıralı bir kümenin her alt kümesinin tam sıralı olduğunu gösterin.

c) Tam sıralı olan fakat iyi sıralı olmayan bir kümeye örnek veriniz.

3.) A en az 2 elemanlı bir küme olsun. $P(A)$ kuvvet kümesi üzerinde tanımlanan

$$X \leqslant Y \iff X \subseteq Y$$

bağıntısının bir sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz. $P(A)$ kümesi bu bağıntıya göre tam sıralı mıdır? Neden? A bir elemanlı bir küme olsaydı $P(A)$ kümesi tam sıralı olur muydu? Neden?

4.) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$'de tanımlanan aşağıdaki bağıntının bir sıralama bağıntısı olup olmadığını inceleyiniz.

$$(x, y) \preccurlyeq (a, b) \iff x \leqslant a \text{ ve } y \leqslant b$$

5.) A ve B tam sıralanmış iki küme olsun. $A \times B$ üzerinde aşağıdaki tanımlanan bağıntı bir sıralama bağıntısı mıdır? $A \times B$ bu bağıntıya göre tam sıralı mıdır? ($a < a' \iff a \leqslant a'$ ve $a \neq a'$)

$$(a, b) \preceq (a', b') \iff a < a' \text{ ise veya } a = a' \text{ iken } b \leqslant b' \text{ ise}$$

6.) A kümesinde tanımlı β_1 ve β_2 sıralama bağıntıları verilsin. $\beta_1 \cap \beta_2$ her zaman bir sıralama bağıntısı mıdır? $\beta_1 \cup \beta_2$ her zaman bir sıralama bağıntısı mıdır? Gösterin.

7.) $A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$ kümesinde $x \preccurlyeq y \iff y|x$ bağıntısına göre küçük elemanların kümesi hangisidir?

○ $\{2, 3, 7\}$ ⊗ $\{4, 6, 7\}$ ○ $\{2, 3\}$ ○ $\{4, 6\}$ ○ Hiçbiri

8.) $A = \{2, 4, 8, 14\}$ kümesi üzerinde "$x \preccurlyeq y \iff x|y$" sıralama bağıntısına göre p : "A tam sıralıdır", q : "A iyi sıralıdır" önermerinin doğruluk değerleri nedir?

○ p, q : Doğru ⊗ p, q : Yanlış ○ p : Doğru, q : Yanlış ○ p : Yanlış, q : Doğru ○ Hiçbiri

9.) $\mathbb{R}$' de bilinen $\leqslant$ sıralama bağıntısına göre $(-1, 1) \cup \{3\}$ kümesi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

⊗ eküs, ebas var ○ eküs, ebas yok ○ eküs var, ebas yok ○ eküs yok, ebas var ○ Hiçbiri

10.) 4 elemanlı bir A kümesi üzerinde tanımlanan bir sıralama bağıntısı <u>en fazla</u> kaç elemanlı olabilir?

⊗ 10 ○ 9 ○ 7 ○ 8 ○ Hiçbiri

11.) $A = \mathbb{R}$ kümesinde bilinen $\leqslant$ sıralaması verilsin. $B = \left\{ x \in \mathbb{Q} : -\dfrac{1}{3} < x \leqslant 4 \right\}$ olsun. Buna göre ebas(B) ve eküs(B) sırasıyla nedir?

⊗ $-\dfrac{1}{3}$ ve 4 ○ Yok ve 4 ○ $-\dfrac{1}{3}$ ve yok ○ 4 ve $-\dfrac{1}{3}$ ○ Hiçbiri

12.) $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 14, 18, 21\}$ kümesi üzerinde "$x \preccurlyeq y \iff x|y$" sıralama bağıntısına göre aşağıdaki kümelerden hangisinin eküs'ü vardır?

○ $\{3, 4\}$ ○ $\{4, 5\}$ ○ $\{5, 6\}$ ○ $\{6, 8\}$ ⊗ Hiçbiri

13.) $\mathbb{R}$'de bildiğimiz $\leqslant$ sıralama bağıntısı verilsin. Buna göre p : "$\mathbb{R}$ tam sıralıdır", q : "$\mathbb{R}$ iyi sıralıdır" önermelerini doğruluk değerleri nedir?

○ p, q : Doğru ○ p, q : Yanlış ⊗ p : Doğru, q : Yanlış ○ p : Yanlış, q : Doğru ○ Hiçbiri

14.) $A = \{1, 4, 5, 6, 8, 10, 16\}$ kümesinde "$x \preceq y \iff x \mid y$" bağıntısına göre küçük elemanlar nedir?

○ $\{1, 4, 5, 6\}$ ⊗ $\{1\}$ ○ $\{4, 5\}$ ○ $\{1, 5\}$ ○ Hiçbiri

15.) 6 elemanlı bir A kümesi üzerindeki bir sıralama bağıntısı en az kaç elemanlı olmalıdır?

⊗ 6 ◯ 7 ◯ 8 ◯ 9 ◯ Hiçbiri

16.) Doğal sayılar kümesinde bildiğimiz $\leqslant$ sıralama bağıntısı verilsin? $A = \{\, x \in \mathbb{N} : x > 7 \,\}$ kümesi için ebas A ve eküs A için hangisi doğrudur:

◯ yok, 7 ◯ yok, yok ◯ 0, 7 ◯ 7, yok ⊗ Hiçbiri

17.) $A = \{\, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 13 \,\}$ kümesinde "$x \preceq y \iff x \mid y$" bağıntısına göre büyük elemanlar nedir?

◯ $\{\, 6, 10 \,\}$ ◯ $\{\, 6, 8, 10 \,\}$ ⊗ $\{\, 6, 8, 10, 13 \,\}$ ◯ $\{\, 5, 8, 10, 13 \,\}$ ◯ Hiçbiri

18.) 3 elemanlı bir A kümesi üzerindeki bir sıralama bağıntısı en fazla kaç elemanlı olur?

◯ 4 ◯ 5 ⊗ 6 ◯ 7 ◯ Hiçbiri

19.) Rasyonel sayılar kümesinde bildiğimiz $\leqslant$ sıralama bağıntısı verilsin? $\left\{\, x \in \mathbb{Q} : x > 0, 2 < x^2 < 49 \,\right\}$ kümesin ebas'ı ve eküs'ü için hangisi doğrudur?

⊗ yok, 7 ◯ yok, yok ◯ 0, 7 ◯ 7, yok ◯ Hiçbiri

Bölüm 6

Fonksiyonlar

Tanım 6.1 A ve B boş olmayan iki küme ve $f \subseteq A \times B$ olsun, yani f, A'dan B'ye bir bağıntı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar gerçekleniyorsa f ye A'dan B'ye bir ***fonksiyon (dönüşüm, tasvir)*** denir.

(i) Her $x \in A$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde bir $y \in B$ olmalı; yani A'da f bağıntına göre eşlenmemiş eleman olmamalı,

(ii) Her $x \in A$ için $(x, y_1) \in f$ ve $(x, y_2) \in f \Longrightarrow y_1 = y_2$ olmalı; yani A kümesinde bir eleman iki farklı elemanla eşlenmemeli.

Başka bir ifadeyle, A dan B ye bir f fonksiyonu; A nın her elemanını B nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen bir kuraldır. Eğer f bağıntısı A'dan B'ye bir fonksiyon ise bunu $f : A \longrightarrow B$ şekline gösteririz. Burada, A kümesine f nin ***tanım kümesi***, B'ye de ***değer kümesi*** denir.

Örnek 6.2 $A = \{ a, b, c, d \}, B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ olsun. Aşağıdaki bağıntıları inceleyelim.

$$\begin{aligned} f_1 &= \{ (a, 3), (b, 2), (c, 7) \} \\ f_2 &= \{ (a, 1), (b, 5), (c, 6), (d, 3), (c, 5) \} \\ f_3 &= \{ (a, 6), (b, 6), (c, 6), (d, 6) \} \\ f_4 &= \{ (a, 3), (b, 1), (c, 4), (d, 7) \} \end{aligned}$$

Burada f_1 fonksiyon değildir, çünkü d elemanı eşlenmemiştir. f_2 de bir fonksiyon değildir, çünkü c elemanı iki farklı elemanla (6 ve 5) eşlenmiştir. f_3 ve f_4, A'dan B'ye birer fonksiyon olup $f_3 : A \longrightarrow B$ ve $f_4 : A \longrightarrow B$ yazarız.

Tanım 6.3 $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon olsun. $(x, y) \in f$ ise y elemanına x elemanının f altındaki ***görüntüsü*** denir ve $y = f(x)$ yazılır. Yani;

$$f = \{ (x, f(x)) : x \in A \}$$

yazılabilir. A daki bütün elemanların f altındaki görüntülerinden oluşan kümeye f nin ***görüntü kümesi*** denir ve $G(f)$ ile gösterilir. Yani

$$G(f) = \{\, f(x) : x \in A \,\} = \{\, y \in B : \exists x \in A, f(x) = y \,\}.$$

Buna göre önceki örnekte $G(f_3) = \{\, 6 \,\}$ ve $G(f_4) = \{\, 1, 3, 4, 7 \,\}$ yazılabilir.

Tanım 6.4 $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ve $M \subseteq A, M \neq A$ olsun. Eğer $g : M \longrightarrow B$ fonksiyonu her $x \in M$ için $f(x) = g(x)$ şartını sağlıyorsa g fonksiyonuna f fonksiyonunun M alt kümesine ***kısıtlanmışı*** denir ve $g = f\big|_M$ yazılır. Benzer şekilde, $A \subseteq D, A \neq D$ olsun. Eğer $h : D \longrightarrow B$ fonksiyonu her $x \in A$ için $f(x) = h(x)$ şartını sağlıyorsa h fonksiyonuna f fonksiyonunun D kümesine ***genişletilmişi*** denir. Bu durumda $h\big|_A = f$ olduğu açıktır.

Örnek 6.5 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$ kuralı ile verilsin. $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $g(x) = x$ kuralı ile verilmişse g fonksiyonu f nin $\mathbb{R}^+$ kümesine kısıtlanmışıdır çünkü her $x \in \mathbb{R}^+$ için

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} = \frac{x + x}{2} = x = g(x).$$

Bu durumda $g = f\big|_{\mathbb{R}^+}$ yazılır.

Tanım 6.6 $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Bir $y \in B$ için $f(x) = y$ ise $x \in A$ elemanına y nin ***bir ters görüntüsü*** denir. y nin bütün ters görüntülerinin kümesi $f^{-1}(y)$ ile gösterilir, yani

$$\boxed{f^{-1}(y) = \{\, x \in A : f(x) = y \,\}}$$

kümesidir. Bazı y'ler için $f^{-1}(y)$ kümesi boş küme olabilir. Ayrıca $Y \subseteq B$ ise Y'deki bütün elemanların ters görüntülerinden oluşan kümeye Y kümesinin ***ters görüntü kümesi*** denir ve $f^{-1}(Y)$ ile gösterilir. O halde

$$\boxed{f^{-1}(Y) = \{\, x \in A : f(x) \in Y \,\} = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)}$$

yazılabilir. $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{\, y \,\})$ olduğu açıktır. Ayrıca $f^{-1}(B) = A$ yazılabilir.

Tanım 6.7 $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ve $X \subseteq A$ olsun.

$$\boxed{f(X) = \{\, f(x) : x \in X \,\} = \{\, y \in B : \exists\, x \in X, f(x) = y \,\}}$$

kümesine X kümesinin ***görüntü kümesi*** denir. $G(f) = f(A)$ olduğu açıktır.

Örnek 6.8 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{2}$ ve $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 1$ olsun. $f([0, \pi]) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve $g((-2, \infty)) = [-1, \infty)$ yazılır.

Ayrıca $f^{-1}((1, \infty)) = \emptyset$ ve $g^{-1}([0, 10]) = [-\sqrt{11}, -1] \cup [1, \sqrt{11}]$ dir.

Tanım 6.9 f ve g tanım kümeleri A olan (yani aynı olan) iki fonksiyon ve her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ ise f ile g ye ***eşit fonksiyonlar*** denir ve $f = g$ yazılır.

Örnek 6.10 $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(n) = (-1)^n$ ve $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, g(m) = \cos(m\pi)$ fonksiyonları eşittir. Fakat

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, h(x) = x - 2 \text{ ve } t : \mathbb{R} \setminus \{ -3 \} \longrightarrow \mathbb{R}, t(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$$

fonksiyonları eşit değildir, çünkü tanım kümeleri farklıdır.

Tanım 6.11 $f : A \longrightarrow A$, her $x \in A$ için $f(x) = x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona A nın ***birim (özdeşlik) fonksiyonu*** denir ve I_A ile gösterilir. A kümesinin köşegeni olan $I_A = \{ (x, x) : x \in A \}$ kümesi ile I_A fonksiyonunun aynı olduğu görülür.

Tanım 6.12 $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu bir $b \in B$ ve her $x \in A$ için $f(x) = b$ şeklinde ise f fonksiyonu bir ***sabit fonksiyon*** denir.

Tanım 6.13 $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Eğer A daki farklı iki elemanın görüntüsü her zaman farklı ise; yani

$$\text{her } x_1, x_2 \in A \text{ için } x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

önermesi doğruysa f fonksiyonuna ***birebirdir (1–1)*** denir. Buna denk olarak, f nin 1–1 olması için gerek ve yeter şart

$$\boxed{\text{her } x_1, x_2 \in A \text{ için } f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2}$$

olmasıdır diyebiliriz.

Örnek 6.14 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^3 + 5}{3}$ fonksiyonu 1–1 dir, çünkü

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow \frac{{x_1}^3 + 5}{3} = \frac{{x_2}^3 + 5}{3} \\ &\Longrightarrow {x_1}^3 + 5 = {x_2}^3 + 5 \\ &\Longrightarrow {x_1}^3 = {x_2}^3 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Fakat $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = \cos(2x)$ fonksiyonu 1–1 değildir, çünkü $f(0) = f(\pi)$ olup farklı iki reel sayının görüntüsü aynıdır.

Tanım 6.15 $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $y \in B$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ mevcutsa, yani B kümesinde f bağıntısına göre eşlenmemiş eleman yoksa, f fonksiyonuna bir ***örten (üzerine)*** fonksiyon denir. f örten $\Longleftrightarrow$ $f(A) = B$ olduğu görülür.

Örnek 6.16 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 7x^5 - 11$ fonksiyonu örtendir. Bunu göstermek için verilen her $y \in \mathbb{R}$ için $f(x) = y$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}$ bulmalıyız. $y \in \mathbb{R}$ verilsin. Bu durumda

$$x = \sqrt[5]{\frac{y+11}{7}}$$

seçilirse $f(x) = y$ olduğu görülür. (Verilen her y için x bulunabileceği açıktır.)

Şimdi $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^{x+1}$ fonksiyonunu inceleyelim. $y \in \mathbb{R}$ verildiğinde $x = \ln y - 1$ seçildiğinde $f(x) = y$ olmaktadır, ancak $y \leqslant 0$ ise bu durumda x bulunamamaktadır. Bu durumda, mesela $y = -1$ için, $g(x) = -1$ olacak şekilde x olmadığından g örten değildir.

Tanım 6.17 $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{-1} \subseteq B \times A$ bağıntısı da bir fonksiyon ise f^{-1} bağıntısına f fonksiyonunun ***ters fonksiyonu*** (kısaca tersi) denir ve $f^{-1} : B \longrightarrow A$ yazılabilir.

Teorem 6.18 $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonunun ters bağıntısının da bir fonksiyon olması için gerek ve yeter şart f nin 1–1 ve örten olmasıdır.

İspat: ($\Longrightarrow$) $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonunun tersi de bir fonksiyon olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ için $f(x_1) = f(x_2) = y$ olsun.

$$\begin{aligned}(x_1, y), (x_2, y) \in f &\Longrightarrow (y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1}\\ &\Longrightarrow f^{-1} \text{ bir fonksiyon olduğundan } x_1 = x_2\end{aligned}$$

olup f nin 1–1 olduğu gösterilmiş olur. Şimdi $y \in B$ verilsin. $f^{-1} : B \longrightarrow A$ bir fonksiyon olduğundan $(y, x) \in f^{-1}$ olacak şekilde sadece bir tane $x \in A$ vardır. Bu durumda $f(x) = y$ olup y nin f altındaki ters görüntüsü x dir. O halde f örtendir.

($\Longleftarrow$) Şimdi de f nin 1–1 ve örten olduğunu kabul edelim. f örten olduğundan f^{-1} bağıntısına göre B kümesinde eşlenmemiş eleman yoktur. Ayrıca

$$\begin{aligned}(y, x_1), (y, x_2) \in f^{-1} &\Longrightarrow (x_1, y), (x_2, y) \in f\\ &\Longrightarrow f \text{ 1–1 olduğundan, } x_1 = x_2\end{aligned}$$

olup f^{-1} bağıntına göre bir eleman birden fazla elemanla eşlenmiş olamaz. O halde $f^{-1} \subseteq B \times A$ bir fonksiyondur. □

Not 6.19 Eğer $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu 1–1 ve örten ise (yani f^{-1} de bir fonksiyon ise) her $y \in B$ için $f^{-1}(y)$ kümesi tek elemanlı olduğu için, yani y nin ters görüntüsü tek türlü belirlendiği için, $f^{-1}(y)$ ifadesi "y nin ters görüntüler kümesi" değil de "y nin ters görüntüsü" olarak anlaşılır. O halde f fonksiyonu 1–1 ve örtense, $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$ yazılabilir.

Teorem 6.20 $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu 1–1 ve örten ise $f^{-1} : B \longrightarrow A$ fonksiyonu da 1–1 ve örtendir.

İspat: f nin 1–1 ve örten olduğunu kabul edelim ve f^{-1} in 1–1 ve örten olduğunu gösterelim. Her $y_1, y_2 \in B$ için

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) &\Longrightarrow f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2)) \\ &\Longrightarrow y_1 = y_2 \end{aligned}$$

olup f^{-1} fonksiyonu 1–1 dir. Şimdi de $x \in A$ verilsin. $f(x) = y \in B$ dersek $f^{-1}(y) = x$ olup x in f^{-1} altındaki ters görüntüsünün y olduğu görülür. O halde f^{-1} örtendir. □

Tanım 6.21 $f : A \longrightarrow B$ ve $g : B \longrightarrow C$ iki fonksiyon ise f ile g nin (bağıntı olarak) bileşkesi de A dan C ye bir fonksiyondur. Bu fonksiyona f ile g fonksiyonlarının ***bileşkesi*** denir ve $g_\circ f$ ile gösterilir.

$$g_\circ f = \{\, (x, z) : \exists y \in B, (x, y) \in f, (y, z) \in g \,\}$$

olup $y = f(x)$ yazılırsa $z = g(y) = g(f(x))$ olacağından

$$\boxed{(g_\circ f)(x) = g(f(x))}$$

kuralıyla verilir.

Teorem 6.22 $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C, h : C \longrightarrow D$ üç fonksiyon ise $h_\circ(g_\circ f) = (h_\circ g)_\circ f$ dir.

İspat: Her $a \in A$ için

$$[h_\circ(g_\circ f)](a) = h((g_\circ f)(a)) = h(g(f(a))) = (h_\circ g)(f(a)) = [(h_\circ g)_\circ f](a)$$

olup $h_\circ(g_\circ f) = (h_\circ g)_\circ f$ eşitliği elde edilir. □

Teorem 6.23 Birebir fonksiyonların bileşkesi birebir; örten fonksiyonların bileşkesi örtendir.

İspat: $f : A \longrightarrow B$ ve $g : B \longrightarrow C$ birebir fonksiyonlar olsun.

$$\begin{aligned} (g_\circ f)(a_1) = (g_\circ f)(a_2) &\Longrightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \\ &\Longrightarrow g \text{ birebir olduğundan } f(a_1) = f(a_2) \\ &\Longrightarrow f \text{ birebir olduğundan } a_1 = a_2 \end{aligned}$$

olup $g_\circ f$ fonksiyonu 1–1 dir. Şimdi de f ve g nin örten olduğunu kabul edelim. $g_\circ f : A \longrightarrow C$ olduğunu hatırlayalım.

$$\begin{aligned} c \in C &\Longrightarrow g : B \longrightarrow C \text{ örten olduğundan } \exists\, b \in B, g(b) = c \\ &\Longrightarrow f : A \longrightarrow B \text{ örten olduğundan } \exists\, a \in A, f(a) = b \end{aligned}$$

olup $(g_\circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$ olduğundan c nin ters görüntüsü a dır. O halde $g_\circ f$ örtendir. □

Sonuç 6.24

(i) $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ birebir ve örtense $(g_\circ f)^{-1} = f^{-1}{}_\circ g^{-1}$ dir.

(ii) $f : A \longrightarrow B$ birebir ve örtense $f_\circ f^{-1} = I_B$ ve $f^{-1}{}_\circ f = I_A$ dır.

Teorem 6.25 $f : A \longrightarrow B$ ve $g : B \longrightarrow C$ iki fonksiyon olmak üzere

(a) $g_\circ f$ örten ise g örtendir,

(b) $g_\circ f$ birebir ise f birebirdir.

ALIŞTIRMALAR

1.) $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon, $A \subseteq X$ ve $B \subseteq X$ olsun. Aşağıdakilerin doğru olduğunu gösterin:

i) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

iii) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$

iv) $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$

İspat i.)

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Longrightarrow \exists\, x \in A \cap B \text{ için } f(x) = y \\ &\Longrightarrow x \in A \text{ ve } x \in B \text{ olup } f(x) \in f(A) \text{ ve } f(x) \in f(B) \\ &\Longrightarrow y \in f(A) \text{ ve } y \in f(B) \\ &\Longrightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

İspat ii.)

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Longrightarrow \exists\, x \in A \cup B \text{ için } f(x) = y \\ &\Longrightarrow x \in A \text{ veya } x \in B \text{ olduğundan } f(x) \in f(A) \text{ veya } f(x) \in f(B) \\ &\Longrightarrow y \in f(A) \text{ veya } y \in f(B) \\ &\Longrightarrow y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} y \in f(A) \cup f(B) &\Longrightarrow y \in f(A) \text{ veya } y \in f(B) \\ &\Longrightarrow \exists\, x_1 \in A \text{ için } f(x_1) = y \text{ veya } \exists\, x_2 \in B \text{ için } f(x_2) = y \\ &\Longrightarrow x_1 \in A \cup B \text{ olup } f(x_1) \in f(A \cup B) \text{ veya } x_2 \in A \cup B \text{ olup } f(x_2) \in f(A \cup B) \\ &\Longrightarrow f(x_1) = f(x_2) = y \in f(A \cup B). \end{aligned}$$

İspat iii.)

$$\begin{aligned} y \in f(A) \setminus f(B) &\Longrightarrow y \in f(A) \text{ ve } y \notin f(B) \\ &\Longrightarrow \exists\, x_1 \in A \text{ için } f(x_1) = y \text{ ve } \forall x \in B \text{ için } f(x) \neq y \\ &\Longrightarrow x_1 \notin B \text{ olmalı} \\ &\Longrightarrow x_1 \in A \setminus B \text{ olup } f(x_1) \in f(A \setminus B) \\ &\Longrightarrow y \in f(A \setminus B) \end{aligned}$$

İspat iv.) $A \subseteq B$ olsun.

$$\begin{aligned} y \in f(A) &\Longrightarrow \exists\, x \in A \text{ için } f(x) = y \\ &\Longrightarrow x \in B \text{ olup } f(x) \in f(B) \\ &\Longrightarrow y \in f(B) \end{aligned}$$

2.) $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon, $X \subseteq B, Y \subseteq B$ olsun. Aşağıdakilerin doğru olduğunu gösterin.

i) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

ii) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

iii) $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

iv) $f^{-1}(B \setminus X) = A \setminus f^{-1}(X)$

İspat i.)

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(X \cup Y) &\iff f(a) \in X \cup Y \\ &\iff f(a) \in X \text{ veya } f(a) \in Y \\ &\iff a \in f^{-1}(X) \text{ veya } a \in f^{-1}(Y) \\ &\iff a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \end{aligned}$$

İspat ii.) Benzer şekildedir.

İspat iii.)

$$\begin{aligned} b \in f(f^{-1}(Y)) &\Longrightarrow \exists a \in f^{-1}(Y) \text{ için } f(a) = b \\ &\Longrightarrow a \in f^{-1}(Y) \text{ olduğundan } f(a) \in Y \\ &\Longrightarrow b \in Y \end{aligned}$$

İspat iv.) Burada $f^{-1}(B) = A$ olduğu hatırlanırsa:

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(B \setminus X) &\iff f(a) \in B \setminus X \\ &\iff f(a) \in B \text{ ve } f(a) \notin X \\ &\iff a \in f^{-1}(B) \text{ ve } a \notin f^{-1}(X) \\ &\iff a \in f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(X) \\ &\iff a \in A \setminus f^{-1}(X) \end{aligned}$$

3.) $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ve $X \subseteq A$ olsun. $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ olduğunu gösterin. Eşitliğin her zaman sağlanması için gerek ve yeter şartın f nin 1–1 olması olduğunu gösterin.

Çözüm: $x \in X \Longrightarrow f(x) \in f(X) \Longrightarrow x \in f^{-1}(f(X))$ olduğundan kapsama doğrudur.

Şimdi de her $X \subseteq A$ için $X = f^{-1}(f(X))$ olduğunu kabul edip f nin 1–1 olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} a_1, a_2 \in A \text{ için } f(a_1) = f(a_2) = b &\Longrightarrow X = \{\, a_1 \,\} \text{ seçelim} \\ &\Longrightarrow f(X) = \{\, b \,\} \text{ ve } f^{-1}(f(X)) = \{\, a_1, a_2, \dots \,\} \text{ olur} \\ &\Longrightarrow X = f^{-1}(f(X)) \text{ olacağından } a_1 = a_2 \text{ olmalıdır.} \end{aligned}$$

Yani f 1–1 dir.

Şimdi de f nin 1–1 olduğunu kabul edelim. Şimdi

$$a \in f^{-1}(f(X)) \Longrightarrow f(a) \in f(X) \Longrightarrow a \in X \text{ (çünkü } f \text{ 1–1)}$$

olduğundan eşitlik gösterilmiş olur. (**Dikkat:** Genelde "$f(a) \in f(X) \Longrightarrow a \in X$" önermesi doğru değildir.)

4.) $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ve $X \subseteq B$ olsun. $f(f^{-1}(X)) \subseteq X$ olduğunu gösterin. Eşitliğin her zaman sağlanması için gerek ve yeter şartın f nin örten olması olduğunu gösterin.

Çözüm: $x \in f(f^{-1}(X)) \Longrightarrow \exists y \in f^{-1}(X)$ için $f(y) = x$ $\Longrightarrow y \in f^{-1}(X)$ olduğundan $f(y) \in X$ dir. O halde $x \in X$ olup kapsama doğrudur.

Şimdi de her $X \subseteq B$ için $X = f(f^{-1}(X))$ olduğunu kabul edip f nin örten olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} X = B \text{ seçelim } &\Longrightarrow f^{-1}(X) = f^{-1}(B) = A \\ &\Longrightarrow X = f(f^{-1}(X)) \text{ olacağından } B = f(A) \\ &\Longrightarrow f \text{ örten} \end{aligned}$$

Şimdi de f nin örten olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} x \in X &\Longrightarrow f \text{ örten olduğundan } \exists y \in f^{-1}(X), f(y) = x \\ &\Longrightarrow f(y) \in f(f^{-1}(X)) \\ &\Longrightarrow x \in f(f^{-1}(X)) \end{aligned}$$

olup $X \subseteq f(f^{-1}(X))$ olur. (**Dikkat:** Genelde "$x \in X \Longrightarrow \exists y \in f^{-1}(X), f(y) = x$" önermesi doğru değildir.) Kapsamanın diğer yönü her zaman doğru olduğundan ispat tamamlanır.

5.) $f : A \longrightarrow B,\ g : B \longrightarrow C$ iki fonksiyon ve $g_\circ f$ birebir olsun. Bu durumda f birebir olmak zorunda mıdır? g birebir olmak zorunda mıdır? İspatlayınız.

Çözüm: f 1–1 olmalıdır, ispatlayalım: $\forall\ a_1, a_2 \in A$ için

$$\begin{aligned} f(a_1) = f(a_2) &\Longrightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \\ &\Longrightarrow (g_o f)(a_1) = (g_o f)(a_2) \\ &\Longrightarrow g_o f \text{ 1–1 olduğundan } a_1 = a_2 \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır. g nin 1–1 olması gerekmez, mesela $A = \{\, a, b \,\}, B = \{\, c, d, e \,\}, C = \{\, 1, 2, 3 \,\}$ ve

$$f = \{\, (a,c), (b,d) \,\}, \quad g = \{\, (c,1), (d,2), (e,2) \,\}, \quad g_o f = \{\, (a,1), (b,2) \,\}$$

örneğinde $g_o f$ 1–1 dir fakat g 1–1 değildir.

6.) Aşağıda $\mathbb{N}$ den $\mathbb{Z}$ ye tanımlı f fonksiyonunun 1–1 ve örten olduğunu gösterin.

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ çift ise;} \\ -\frac{n+1}{2}, & n \text{ tek ise.} \end{cases}$$

Çözüm: Eşlemenin aşağıdaki gibi yapıldığı görülür:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & -5 & \dots \end{array}$$

Önce f'nin 1–1 olduğunu gösterelim. $n, m \in \mathbb{N}$ için $f(n) = f(m)$ olsun.

Durum 1. n, m çift: Bu durumda $n/2 = m/2$ den $n = m$ bulunur.

Durum 2. n, m tek: Bu durumda $-(n+1)/2 = -(m+1)/2$ den $n = m$ bulunur.

Durum 3. n tek, m çift: Bu durumda $m/2 = -(n+1)/2$ den $m + n = -1$ elde edilir ki, $m, n \in \mathbb{N}$ olduğundan böyle bir durum olamaz.

Durum 4. m tek, n çift: Bu durumda $n/2 = -(m+1)/2$ den $m + n = -1$ elde edilir ki, $m, n \in \mathbb{N}$ olduğundan böyle bir durum olamaz.

Sonuç olarak, f 1–1 dir. Şimdi de f nin örten olduğunu gösterelim. $y \in \mathbb{Z}$ verilsin.

Durum 1. $y \geqslant 0$: Bu durumda $x = 2y$ seçilirse, x çift bir doğal sayı olup

$$f(x) = f(2y) = \frac{2y}{2} = y \qquad \text{olup } f \text{ örtendir.}$$

Durum 2. $y < 0$: Bu durumda $x = -2y - 1$ seçilirse, x tek bir doğal sayı olup

$$f(x) = f(-2y-1) = -\frac{(-2y-1)+1}{2} = y \qquad \text{olup } f \text{ örtendir.}$$

7.) $f : A \longrightarrow B$ birebir ve $g : B \longrightarrow C$ örten ise $g_\circ f$ birebir olmak zorunda mıdır? Örten olmak zorunda mıdır? Açıklayın.

Çözüm: $A = \{ a, b \}, B = \{ c, d, e \}, C = \{ 1, 2 \}$ ve

$$f = \{ (a,c), (b,d) \}, \quad g = \{ (c,2), (d,2), (e,1) \}, \quad g_o f = \{ (a,2), (b,2) \}$$

örneği incelendiğinde iki cevabın da "hayır" olduğu görülür.

8.) 4 elemanlı bir kümeden 4 elemanlı bir kümeye kaç tane örten fonksiyon yazılabilir?

○ 256 ○ 16 ⊗ 24 ○ 64 ○ Hiçbiri

9.) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x - |x|}{2}$ olsun. Buna göre aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi f nin $\mathbb{R}^-$ ye bir kısıtlanmışıdır?

⊗ $g(x) = x$ ○ $g(x) = 2x$ ○ $g(x) = 0$ ○ $g(x) = x/2$ ○ Hiçbiri

10.) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ise $f^{-1}([4,9])$ aşağıdakilerden hangisidir?

○ $[-2,4]$ ○ $[2,3]$ ○ $[-3,3]$ ○ $[-3,2] \cup \{3\}$ ⊗ Hiçbiri

11.) Tanım kümesinden $\mathbb{R}$ ye aşağıda verilen fonksiyonlardan hangisinin tersi de bir fonksiyondur?

○ $f(x) = x^3 - 7x$ ⊗ $f(x) = x^3/4$ ○ $f(x) = \tan x$ ○ $f(x) = e^{\sin x}$ ○ Hiçbiri

12.) Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin tersi de $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyondur?

○ $h(x) = 3^x$ ⊗ $g(x) = 2x^3 - 3$ ○ $t(x) = x^3 - 9x$ ○ $f(x) = \tan x$ ○ Hiçbiri

13.) 4 elemanlı bir A kümesinden 5 elemanlı bir B kümesine kaç tane 1–1 fonksiyon yazılabilir?

○ 20 ⊗ 120 ○ 720 ○ 3125 ○ Hiçbiri

14.) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 1$ ise $f^{-1}([-1,9]) =?$

○ $[0,4]$ ○ $[-1,4]$ ○ $(-\infty,4]$ ○ $[1,4]$ ⊗ Hiçbiri

15.) $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1, g(x) = \dfrac{x+1}{4}$ olduğuna göre $(f_o g^{-1})(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

⊗ $\left\{ 0, \dfrac{1}{2} \right\}$ ○ $\left\{ 0, \dfrac{3}{2} \right\}$ ○ $\{ 0, 2 \}$ ○ $\{ 0 \}$ ○ Hiçbiri

16.) Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin tersi de $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyondur?

○ $h(x) = \cos(1/x)$ ○ $t(x) = x^5 - x$ ○ $f(x) = e^x$ ⊗ $g(x) = x^3 - \dfrac{1}{2}$ ○ Hiçbiri

17.) 5 elemanlı bir A kümesinden 6 elemanlı bir B kümesine kaç tane 1–1 fonksiyon yazılabilir?

○ $6^5 = 7776$ ⊗ 720 ○ 120 ○ 3125 ○ Hiçbiri

18.) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 1$ ise $f^{-1}([-1,4]) =?$

○ $[0,1]$ ○ $[-1,1]$ ○ $(-\infty,0]$ ○ $[1,\sqrt{3}]$ ⊗ Hiçbiri

19.) $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1, g(x) = \dfrac{x+1}{3}$ olduğuna göre $(f_o g^{-1})(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

○ $\{ 0, 1 \}$ ○ $\{ 0, -1 \}$ ⊗ $\left\{ 0, \dfrac{2}{3} \right\}$ ○ $\emptyset$ ○ Hiçbiri

20.) $f : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon olsun. Her $X, Y \subseteq B$ için p : " $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ " ve q : " $f^{-1}(B \setminus X) \subseteq A \setminus f^{-1}(X)$ " önermeleri veriliyor. Aş. hangisi doğrudur?

$\otimes$ p :Doğru, q :Yanlış ○ p, q :Doğru ○ p, q :Yanlış ○ p :Yanlış, q :Doğru ○ Hiçbiri

21.) Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi tanım kümesinden $\mathbb{R}$ ye 1–1 dir fakat örten değildir?

○ $f(x) = \sqrt{x}$ ○ $f(x) = e^x$ ○ $f(x) = \sqrt{\ln x}$ ○ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\otimes$ Hepsi

22.) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2$ ise $f\big([-4, 1]\big)$ =?

○ $[1, 16]$ $\otimes$ $[-16, 0]$ ○ $[-4, -1]$ ○ $[-1, 0]$ ○ Hiçbiri

23.) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ olsun. Aşağıdaki reel fonksiyonlardan hangisi f nin bir genişletilmişidir?

○ $g(x) = |x|$ ○ $h(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}$ $\otimes$ $t(x) = [\![x]\!]$ ○ $r(x) = x \cdot \tan x \cdot \cot x$ ○ Hepsi

24.) $f : A \longrightarrow B$ olsun. Her $X, Y \subseteq A$ için p : " $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ " ve q : " $f(X) \setminus f(Y) \subseteq f(X \setminus Y)$ " önermeleri veriliyor. Buna göre:

○ p :Doğru, q :Yanlış ○ p, q :Doğru ○ p, q :Yanlış $\otimes$ p :Yanlış, q :Doğru ○ Hiçbiri

25.) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3$ ise $f^{-1}\big([-4, 1]\big)$ =?

○ $[-3, 1]$ $\otimes$ $[-2, 2]$ ○ $[-2, 13]$ ○ $[3, +\infty)$ ○ Hiçbiri

Bölüm 7

İşlem ve Özellikleri

Tanım 7.1 A boş olmayan bir küme ve $f : A \longrightarrow A$ bir fonksiyon ise f ye A da bir ***birli işlem*** denir. Eğer $f : A \times A \longrightarrow A$ bir fonksiyon ise f ye A da bir ***ikili işlem*** denir. Benzer şekilde $f : \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n-\text{tane}} \longrightarrow A$ bir fonksiyon ise f'ye A'da bir $n-$***li işlem*** denir.

Örnek 7.2 $A = \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$ olsun. $f : A \longrightarrow A$ fonksiyonu her $x \in A$ için $f(x) = \sqrt{x}$ kuralıyla verilsin. f, A'da bir birli işlemdir. $g : A \times A \longrightarrow A$ fonksiyonu her $(x, y) \in A \times A$ için $g(x, y) = x + y$ şeklinde verilen fonksiyon bir ikili işlemdir. Fakat $x \div y$ veya $x - y$ şeklindeki bir kural $A \times A$ kümesinden A'ya bir fonksiyon tanımlamadığı için A'da bir ikili işlem değildir.

Not 7.3 $A \times A$'dan A'ya bir fonksiyon aslında A nın iki elemanının yine A nın bir elemanına eşleyen bir kuraldır. Bu nedenle A'da bir ikili işlemin tanımı "A nın iki elemanının yine A nın bir elemanına eşleyen bir kural" olarak verilebilir.

Örnek 7.4 $A = \{ 1, 2, 3 \}$ olsun. $f : A \times A \longrightarrow A$ fonksiyonu şöyle verilsin:

$$f : \begin{array}{lll} (1,1) \longrightarrow 3, & (2,1) \longrightarrow 1, & (3,1) \longrightarrow 3 \\ (1,2) \longrightarrow 2, & (2,2) \longrightarrow 1, & (3,2) \longrightarrow 1 \\ (1,3) \longrightarrow 2, & (2,3) \longrightarrow 2, & (3,3) \longrightarrow 1 \end{array}$$

Bu durumda f, A da bir ikili işlemdir.

Not 7.5 Bu bölümde sadece ikili işlemlerin özelliklerini inceleyeceğiz. Bu nedenle "ikili işlem" yerine kısaca "işlem" diyeceğiz. İkili işlemleri f, g harfi yerine genelde $*, \otimes, \star, \oplus, \odot, \circ, \Box$ gibi sembollerle göstereceğiz. Ayrıca ikili işlemleri elemanların ortasına yazacağız, yani mesela bir önceki örnekte $f(3, 2) = 1$ yerine kısaca $3f2 = 1$ yazacağız. Eğer f harfi yerine $*$ sembolu kullanırsak bu ifadeyi $3 * 2 = 1$ şeklinde yazarız. Şimdiye kadar kullandığımız toplama, çarpma, bölme, kesişim, birleşim ve simetrik fark gibi işlemlerin elemanların arasına yazıldığına dikkat ediniz.

Örnek 7.6 Bir A kümesinin kuvvet kümesi $P(A)$ üzerinde tanımlanan kesişim ($\cap$) ve birleşim ($\cup$) işlemleri birer ikili işlemdir.

$$\cap : P(A) \times P(A) \longrightarrow P(A)$$
$$\cup : P(A) \times P(A) \longrightarrow P(A)$$

İşlemin Özellikleri

f, A'da bir ikili işlem olsun. f'yi $*$ sembolü ile gösterelim.

Tanım 7.7 (Kapalılık Özelliği) Her $a, b \in A$ için $a * b \in A$ oluyorsa $*$ işlemine ***kapalıdır*** denir. İşlemin tanımından anlaşılacağı gibi aslında bir işlem kapalı olmalıdır.

Tanım 7.8 (Birleşme Özelliği) Her $a, b, c \in A$ için

$$\boxed{(a * b) * c = a * (b * c)}$$

önermesi doğruysa $*$ işleminin ***birleşme özelliği*** vardır veya kısaca $*$ işlemi ***birleşmelidir*** denir.

Tanım 7.9 (Değişme Özelliği) Her $a, b \in A$ için

$$\boxed{a * b = b * a}$$

önermesi doğruysa $*$ işleminin ***değişme özelliği*** vardır veya kısaca $*$ işlemi ***değişmelidir*** denir.

Tanım 7.10 (Birim (Etkisiz) Eleman Özelliği) Her $a \in A$ için

$$\boxed{a * e = a \quad \text{ve} \quad e * a = e}$$

şartını sağlayan bir $e \in A$ varsa bu elemana $*$ işleminin ***birim (etkisiz) elemanı*** denir.

Tanım 7.11 (Ters Eleman Özelliği) $*$ işlemi birim elemanı e olan bir işlem olsun. Eğer, bir $a \in A$ için

$$\boxed{a * b = e \quad \text{ve} \quad b * a = e}$$

şartını sağlayan bir $b \in A$ varsa bu b elemanına a elemanının $*$ işlemine göre ***tersi*** (kısaca tersi) denir ve genelde a^{-1} ile gösterilir.

Not 7.12 Ters eleman özelliğinden bahsetmek için birim elemanın olması gerekir. Ayrıca her elemanın tersi olmayabileceği gibi bazı elemanların birden fazla tersi olabilir. Bir a elemanının tersi için a^{-1} gösterimi standart değildir. Mesela bir sayının toplama işlemine göre tersi içini $-a$ kullanılmaktadır. Bazen a'nın tersi için a^{-1} kullanılması $1/a$ ile karışmaktadır. Bu durumda a nın tersi için $\widetilde{a}$ veya a' sembolü kullanılabilir.

Tanım 7.13 (Dağılma Özelliği) $*$ ve $\triangle$ işlemleri A'da tanımlanmış iki ikili işlem olsun. Eğer her $a, b, c \in A$ için

$$\boxed{a * (b \triangle c) = (a * b) \triangle (a * c)}$$

önermesi doğru ise $*$ işleminin $\triangle$ işlemi üzerine ***soldan dağılma özelliği vardır*** denir. Eğer her $a, b, c \in A$ için

$$\boxed{(a \triangle b) * c = (a * c) \triangle (b * c)}$$

önermesi doğru ise $*$ işleminin $\triangle$ işlemi üzerine ***sağdan dağılma özelliği vardır*** denir. $*$ işleminin $\triangle$ işlemi üzerine hem sağdan hem de soldan dağılma özelliği varsa kısaca ***dağılma özelliği vardır*** diyeceğiz.

Örnek 7.14 Reel sayılarda tanımlanan çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır, çünkü her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \quad \text{ve} \quad (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

önermesi doğrudur. Ancak toplama işleminin çarpma üzerine dağılma özelliği yoktur. Ayrıca kümeler üzerinde tanımlanan $\cap$ ve $\cup$ işlemlerinin birbiri üzerine dağılma özellikleri vardır, çünkü her A, B, C kümesi için

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{ve} \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

önermeleri ile birlikte

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{ve} \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

önermeleri de doğrudur.

Teorem 7.15 Bir $*$ işleminde birim eleman (varsa) tektir.

İspat: $*$ işleminin e ve f gibi iki tane birim elemanı olsun. e bir birim eleman olduğundan $e * f = f$ dir. Ayrıca f bir birim eleman olduğundan $e * f = e$ olmalıdır. O halde $e = f$ dir. □

Teorem 7.16 Birleşme özelliği olan bir $*$ işleminde bir elemanın tersi (varsa) tektir.

İspat: $*$ işleminin birim elemanı e olsun. a elemanının b ve c gibi iki tane tersi olsun. O halde

$$a * b = b * a = a * c = c * a = e$$

yazabiliriz. Şimdi;

$$b = b * e = b * (a * c) = (b * a) * c = e * c = c$$

olup $b = c$ olduğu gösterilmiş olur. □

Örnek 7.17 $*: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ her $x, y \in \mathbb{N}$ için $x * y = x + 2y$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyelim.

i) Her $a, b \in \mathbb{N}$ için $a * b = a + 2b \in \mathbb{N}$ olduğundan işlem kapalılık özelliğine sahiptir.

ii) Her $a, b, c \in \mathbb{N}$ için

$$(a * b) * c = (a + 2b) * c = a + 2b + 2c \quad \text{ ve } \quad a * (b * c) = a * (b + 2c) = a + 2b + 4c$$

ifadeleri genelde eşit olmadığından (mesela $c \neq 0$ iken) birleşme özelliği yoktur.

iii) $2 * 7 = 16$ ve $7 * 2 = 11$ olup $16 \neq 11$ olduğundan değişme özelliği yoktur.

iv) Her $a \in \mathbb{N}$ için

$$a * e = a \Longrightarrow a + 2e = a \Longrightarrow 2e = 0 \Longrightarrow e = 0 \text{ olabilir.}$$

Ancak $0 * a = 2a$ olup birim eleman 0 olamaz. O halde birim eleman yoktur. (Ya da, her $a \in \mathbb{N}$ için $e * a = a$ denkleminin sağlayan bir $e \in \mathbb{N}$ bulunamaz, çünkü $e = -a$ bulunur ve birim eleman a'ya bağlı olamaz.)

v) Birim eleman olmadığından ters elemandan söz edilemez.

Örnek 7.18 Bir A kümesinin kuvvet kümesi $P(A)$ üzerinde tanımlanan $\cap$ işleminin özelliklerini inceleyelim. $\cap : P(A) \times P(A) \longrightarrow P(A)$ işleminin özellikleri:

i) Her $X, Y \in P(A)$ için $X \cap Y \in P(A)$ dır, çünkü $X \subseteq A, Y \subseteq A \Longrightarrow X \cap Y \subseteq A$ dır. O halde işlem kapalıdır.

ii) Her $X, Y, Z \in P(A)$ için $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$ olup işlem birleşme özelliğine sahiptir.

iii) Her $X, Y \in P(A)$ için $X \cap Y = Y \cap X$ olduğundan işlem değişme özelliğine sahiptir.

iv) Her $X \in P(A)$ için $X \cap A = X$ olduğundan ve işlem değişme özelliğine sahip olduğundan birim eleman $e = A$ dır.

v) A'nın tersi A dır, çünkü $A \cap A = A = e$ dir. Eğer $X \neq A$ ise

$$X \cap Y = Y \cap X = A$$

olacak şekilde bir $Y \in P(A)$ bulunamayacağından X'in tersi yoktur. Yani sadece A'nın tersi vardır.

Not 7.19 Bir $*$ işleminin değişme özelliği varsa, birim eleman bulunurken $a * e = a$ ve $e * a = a$ denklemlerinden sadece birisini kullanmak yeterlidir. Benzer şekilde ters eleman bulunurken de $a * b = e$ ve $b * a = e$ denklemlerinden sadece birisini çözmek yeterlidir.

Örnek 7.20 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinde $a * b = a + b - 1$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyelim.

i) Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a * b = a + b - 1 \in \mathbb{Z}$ olduğundan işlem kapalıdır.

ii) Her $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için

$$a * (b * c) = a * (b + c - 1) = a + b + c - 2 = (a + b - 1) * c = (a * b) * c$$

olduğundan işlem birleşme özelliğine sahiptir.

iii) Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a * b = a + b - 1 = b + a - 1 = b * a$ olduğundan işlem değişmelidir.

iv) Her $a \in \mathbb{Z}$ için

$$a * e = a \Longrightarrow a + e - 1 = a \Longrightarrow e = 1$$

elde edilir, çünkü işlem değişmelidir.

v) $a * b = 1 \Longrightarrow a + b - 1 = 1 \Longrightarrow b = 2 - a$ olur. İşlem değişmeli olduğundan $b * a = 1$ denklemini çözmeye gerek yoktur. Her $a \in \mathbb{Z}$ için $a^{-1} = 2 - a \in \mathbb{Z}$ olup her tamsayının tersi mevcuttur.

Tanım 7.21 A ve B boş olmayan iki küme olsun. $\odot : B \times A \longrightarrow A$ şeklindeki bir fonksiyona A da bir ***dış işlem*** denir.

ALIŞTIRMALAR

1.) Bir A kümesinde tanımlanan $\triangle$ işleminin değişme ve birleşme özelliği varsa, $a, b, c, d \in A$ için

$$(a \triangle b) \triangle (c \triangle d) = \big[(d \triangle c) \triangle a\big] \triangle b$$

olduğunu gösterin.

2.) $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_3(x) = \frac{x-1}{x}, \quad f_4(x) = \frac{1}{x}, \quad f_5(x) = \frac{x}{x-1}, \quad f_6(x) = 1 - x.$$

Buna göre $\{f_1, f_2\}, \{f_1, f_3\}, \{f_1, f_4\}, \{f_1, f_5\}, \{f_1, f_2, f_3\}$ kümelerinden hangileri fonksiyonlardaki bileşke işlemine göre kapalıdır?

3.) $\mathbb{Z}$'de $a \triangle b = |a| + |b|$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

4.) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesinde $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

5.) $\mathbb{Z}$'de $x \odot y = xy + 2(x + y) + 2$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

6.) $\mathbb{R}$'de $a \odot b = \sqrt{a^2 b^2}$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

7.) $\mathbb{Z}$'de $a \star b = b$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

8.) $\mathbb{Z}$'de

$$a * b = \begin{cases} a + b - 2, & a + b \text{ çift ise} \\ \frac{ab}{2}, & a + b \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

9.) $\mathbb{Q}$'da $a * b = ab + 1$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

10.) $\mathbb{Z}$'de $a * b = a + b - ab$ şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

11.) $\mathbb{R}$'de

$$a * b = \begin{cases} a + b, & a \geqslant b \text{ ise} \\ ab, & a < b \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan işlemin özelliklerini inceleyin.

12.) İki elemanlı bir A kümesinde kaç tane farklı işlem tanımlanabilir?

○ 256 ○ 4 ⊗ 16 ○ 8 ○ Hiçbiri

13.) $\mathbb{R}^+$ kümesinde tanımlanan $a * b = a^b$ şeklindeki işlem için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

○ Kapalı değil ○ Birleşme öz. var ○ Değişme öz. var ○ Birim eleman var ⊗ Hiçbiri

14.) Rasyonel sayılar kümesinde her $a, b \in \mathbb{Q}$ için aşağıda tanımlanan kurallardan hangisi bir işlem tanımlar?

○ $(a+1)^b$ ⊗ $\dfrac{1}{a^2 + b^4 + 1}$ ○ $\sqrt{a^2 + b^2}$ ○ $\dfrac{a^2 - b^2}{a}$ ○ Hiçbiri

15.) $\mathbb{Z}$'de $a * b = a + b + 9ab$ işlemi tanımlanıyor. Buna göre tersi olan elemanların kümesi nedir?

⊗ $\{0\}$ ○ $\{0, -1\}$ ○ $\emptyset$ ○ $\left\{-\dfrac{1}{9}\right\}$ ○ Hiçbiri

16.) Reel sayılar kümesinde tanımlanan $a * b = a + b - ab$ şeklinde işlem için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

⊗ Her elemanın tersi var ○ Birleşme öz. var ○ Değişme öz. var ○ Birim eleman var ○ Hiçbiri

17.) $\mathbb{R}$'de aşağıda kuralı verilen işlemlerin hangisinin birim elemanı vardır?

○ $a * b = \sin(a \cdot b)$ ○ $a * b = 4^{a+b}$ ○ $a * b = a \cdot |b|$ ○ $a * b = a + 2b - 1$ ⊗ Hiçbiri

18.) Bir $\emptyset \neq A$ kümesinin kuvvet kümesi $P(A)$ üzerinde $X * Y = X \setminus Y$ işlemi tanımlanıyor. Buna göre:

○ Her elemanın tersi var ⊗ Birleşme öz. yok ○ Değişme öz. var ○ Birim el. var ○ Hiçbiri

19.) $\mathbb{Z}$'de $a \star b = b$ şeklinde tanımlanan işlemle ilgili hangisi doğrudur?

○ En az iki elemanın tersi var ○ Birleşme öz. yok ○ Değişme öz. var ○ Birim el. var ⊗ Hiçbiri

20.) A kümesinde bir $*$ işlemi tanımlansın. Bazı elemanların birden fazla tersinin olduğu bilindiğine göre $*$ ile ilgili aş. hangisi söylenebilir?

○ Değişme öz. yok ⊗ Birleşme öz. yok ○ Birden fazla birim el. var ○ Kapalı değil ○ Hiçbiri

21.) Bütün kümeler üzerinde tanımlanan $A * B = \overline{A \cup B}$ işlemi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

○ Kapalı değil ○ Birleşme öz. var ○ Değişme öz. yok ○ Birim el. var ⊗ Hiçbiri

22.) Aşağıdaki kümelerden hangisi yanında verilen işlemle bir monoiddir?

○ $\mathbb{R}, a * b = b$ ○ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}, (a, b) * (c, d) = (a, d)$ ⊗ $\mathbb{Z}, a * b = a + b - 1$ ○ $\mathbb{Q}, a * b = ab - 1$ ○ H.B.

Bölüm 8

Cebirsel Yapılar

Tanım 8.1 Üzerinde en az bir işlem tanımlı olan ve bu işleme göre bazı şartları sağlayan kümeye bir ***cebirsel yapı*** denir. Eğer A kümesi üzerinde bir $*$ işlemi tanınlanmışsa $(A, *)$ ikilisine tek işlemli bir cebirsel yapıdır. Benzer şekilde, $\triangle$ başka bir işlem ise $(A, *, \triangle)$ yapısı iki işlemli bir cebirsel yapıdır. Eğer $*$ ve $\triangle$ işlemleri A ve B kümeleri üzerinde birer n–li işlem iseler o zaman $(A, *)$ ve $(B, \triangle)$ sistemlerine ***aynı türden sistemler*** denir.

Tanım 8.2 $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ve $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ birer ikili işlemdir. O halde $(\mathbb{Z}, +)$ ve $(\mathbb{N}, \cdot)$ aynı türden sistemlerdir.

Tanım 8.3 Boş olmayan bir S kümesi üzerinde tanımlanan $*$ işleminin birleşme özelliği varsa $(S, *)$ sistemine bir ***yarıgrup*** denir. Birim elemanı olan yarıgruplara da ***monoid*** denir.

Örnek 8.4 $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{R}^+, \cdot)$ sistemleri birer yarıgruptur.

Tanım 8.5 G boş olmayan bir küme ve $*, G$'de bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki dört şart sağlanıyorsa $(G, *)$ sistemine bir ***grup*** denir.

i) Her $a, b \in G$ için $a * b \in G$. (Kapalılık)

ii) Her $a, b, c \in G$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$. (Birleşme)

iii) Her $a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde $e \in G$ vardır. (Birim eleman)

iv) Her $a \in G$ için $a * b = b * a = e$ olacak şekilde $b \in G$ vardır. (Ters eleman)

Bunlara ilaveten eğer

v) Her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ (Değişme) özelliği varsa $(G, *)$ sistemine bir ***abelyen (değişmeli) grup*** denir.

Not 8.6 Burada (iv) özelliğindeki b elemanına a nın $*$ işlemine göre ***tersi*** denir ve genelde $b = a^{-1}$ şeklinde gösterilir. Grup işlemi toplama ise (veya toplamsal bir gösterim şekli kullanılıyor ise) $b = -a$ ile gösterilir.

Örnek 8.7 $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ sistemleri birer abelyen gruptur. Ayrıca $(\mathbb{Q} \setminus \{ 0 \}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}, \cdot)$ sitemleri de birer abelyen gruptur. Her elemanın tersi olmadığından $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot)$ ve $(\mathbb{Z}, \cdot)$ sistemleri bir grup değildir.

Örnek 8.8 $A \neq \emptyset$ olmak üzere $(P(A), \cup)$ sistemini düşünelim. Kapalılık ve birleşme özelliği kolaylıkla gösterilebilir. Birim eleman da $\emptyset$ dir. Ancak bu işlemde sadece birim elemanın tersi mevcuttur, çünkü X en az bir elemanlı bir küme ise

$$X \cup Y = Y \cup X = \emptyset$$

şartını sağlayan bir $Y \in P(A)$ bulunamaz. O halde $(P(A), \cup)$ sistemi bir grup değildir.

Örnek 8.9 $G = \{ 3^x : x \in \mathbb{Z} \}$ kümesinde $3^x \star 3^y = 3^{x+y}$ şeklinde bir $\star$ işlemi tanımlanıyor. $a, b \in \mathbb{Z}$ için $a + b \in \mathbb{Z}$ olduğundan $3^a \star 3^b = 3^{a+b} \in G$ olur. Ayrıca

$$3^a \star (3^b \star 3^c) = 3^a \star 3^{b+c} = 3^{a+b+c} = 3^{a+b} \star 3^c = (3^a \star 3^b) \star 3^c$$

olup $\star$ işleminin birleşme özelliği vardır. Birim elemanının $3^0 = 1$ olduğu kolayca görülür. Her $3^a \in G$ elemanının tersi $3^{-a} \in G$ elemanıdır, çünkü

$$3^a \star 3^{-a} = 3^{-a} \star 3^a = 3^0 = 1.$$

Sonuç olarak $(G, \star)$ sisteminin bir grup olduğu görülür.

Teorem 8.10 $(G, *)$ bir grup olsun.

a) G'nin birim elemanı yegânedir.

b) Her elemanın sadece bir tane tersi vardır.

c) Her $a \in G$ için $(a^{-1})^{-1}$ dir.

d) Her $a, b \in G$ için $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ dir.

İspat a) Bir işlemde birim elemanın tekliği gösterilmiştir. (Teorem 7.15)

İspat b) $*$ işleminin birleşme özelliği olduğundan her elemanın tersi tektir. (Teorem 7.16)

İspat c) $x * y = e$ ve $y * x = e$ ise $x^{-1} = y$ olduğunu biliyoruz. Şimdi

$$a^{-1} * a = e \quad \text{ve} \quad a * a^{-1} = e$$

olup $x = a^{-1}$ ve $y = a$ dersek $(a^{-1})^{-1} = a$ olduğu görülür.

İspat d) Şimdi

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * \underbrace{(b * b^{-1})}_{e} * a^{-1} = a * a^{-1} = e$$

$$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * \underbrace{(a^{-1} * a)}_{e} * b = b^{-1} * b = e$$

eşitliklerinden ispat tamamlanır. □

Tanım 8.11 $(G, *)$ birim elemanı e olan bir grup ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Her $a \in G$ için:

a) $a^1 = a$,

b) $a^2 = a * a, a^3 = a * a * a, \ldots, a^n = a^{n-1} * a \quad (n \geqslant 2)$

c) $a^0 = e$

d) $a^{-n} = (a^n)^{-1} \quad (n \geqslant 1)$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımlar çarpımsal gösterim şekli içindir. Toplamsal gösterim şeklinde grup işlemi $+$ ile ve bir a elemanının tersi $-a$ ile gösterilir. Bu durumda yukardaki tanımlar

$$1 \cdot a = a, \quad na = (n-1)a + a, \quad 0 \cdot a = e, \quad (-n)a = -(na)$$

şeklinde verilir.

Teorem 8.12 $(G, *)$ bir grup ve $m, n \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda her $x \in G$ için $(x^m)^n = x^{mn}$ ve $x^m * x^n = x^{m+n}$ dir.

Tanım 8.13 $(G, *)$ bir grup ve $\emptyset \neq S \subseteq G$ olsun. Eğer $(S, *)$ yapısı bir grup ise (yani S kümesi de aynı $*$ işlemine göre grup oluyorsa) S'ye G'nin bir ***altgrubu*** denir.

Not 8.14 Eğer S kümesi bir altgrup değilse ya kapalı değildir, ya birim eleman yoktur ya da S'deki bazı elemanların tersleri S ye ait değildir. Ancak $S \subseteq G$ olduğundan birleşme özelliği S'de vardır.

Örnek 8.15 $(\mathbb{Z}, +)$ grubu $(\mathbb{Q}, +)$ grubun altgrubudur. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ grubu $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ grubunun altgrubudur.

Teorem 8.16 $(G, *)$ bir grup ve S de G'nin boş olmayan bir altkümesi olsun. S nin bir altgrup olması için gerek ve yeter şart her $a, b \in S$ için $a * b^{-1} \in S$ olmasıdır.

Örnek 8.17 $G = (\mathbb{Z}, +)$ grubu olsun. $m \in \mathbb{Z}$ sabit bir tamsayı olmak üzere $m\mathbb{Z} = \{\, mk : k \in \mathbb{Z} \,\}$ alt kümesini düşünelim. $a, b \in m\mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda bir $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ için $a = mk_1, b = mk_2$ şeklindedir. Biz $a * b^{-1} \in m\mathbb{Z}$ olduğunu; yani $a - b \in m\mathbb{Z}$ olduğunu göstereceğiz. Şimdi, $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$ olduğundan

$$a - b = mk_1 - mk_2 = m(k_1 - k_2) \in m\mathbb{Z}$$

olup Teorem 8.16 den dolayı $m\mathbb{Z}$ bir altgrup olur.

Örnek 8.18 $(G, *)$ bir grup ve $a \in G$ olsun. $H = \{\, x \in G : a * x = x * a \,\}$ kümesinin bir altgrup olduğunu gösterelim. $x, y \in H$ alalım. O halde $a * x = x * a$ ve $a * y = y * a$ dır. Şimdi

$$\begin{aligned} a * y = y * a &\Longrightarrow \text{ sağdan } y^{-1} \text{ ile }, a = y * a * y^{-1} \\ &\Longrightarrow \text{ soldan } y^{-1} \text{ ile }, y^{-1} * a = a * y^{-1} \end{aligned}$$

olup $y^{-1} \in H$ olduğu görülür. Daha sonra,

$$(x * y^{-1}) * a = x * (y^{-1} * a) = x * (a * y^{-1}) = (x * a) * y^{-1} = (a * x) * y^{-1} = a * (x * y^{-1})$$

olduğundan $x * y^{-1} \in H$ olduğu görülür. Teorem 8.16'den dolayı H bir altgruptur. Aslında bu altgrup a elemanı ile değişmeli olan elemanların kümesidir.

Tanım 8.19 Boş olmayan bir H kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ ikili işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(H, \oplus, \odot)$ iki işlemli cebirsel yapısına bir ***halka*** denir.

a) $(H, \oplus)$ bir abelyen gruptur.

b) $(H, \odot)$ bir yarı gruptur.

c) $\odot$ işleminin $\oplus$ üzerine dağılma özelliği vardır.

Örnek 8.20 Bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümeleri birer halkadır. Yine, bilinen matris toplaması ve matris çarpması işlemlerine göre 2×2 tipindeki reel matrislerin kümesi bir halkadır.

Tanım 8.21 Boş olmayan bir H kümesi üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ ikili işlemleri tanımlansın. $\oplus$ işleminin birim elemanını 0_H ile gösterelim. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(H, \oplus, \odot)$ iki işlemli cebirsel yapısına bir ***cisim*** denir.

a) $(H, \oplus)$ bir abelyen gruptur.

b) $(H \setminus \{\, 0_H \,\}, \odot)$ bir abelyen gruptur.

c) $\odot$ işleminin $\oplus$ üzerine dağılma özelliği vardır.

Örnek 8.22 Bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümeleri birer cisimdir. Modulo 7 toplama ve çarpma işlemlerine göre $\mathbb{Z}_7 = \{\, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \,\}$ kümesi bir cisimdir.

ALIŞTIRMALAR

1.) Aşağıdaki kümelerin yanlarında verilen işlemlerle birlikte birer abelyen grup oluşturup oluşturmadıklarını araştırınız.

a) $\mathbb{N}, a * b = a - b$

b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}, a * b = a/b$

c) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, a * b = \frac{ab}{2}$

d) $\mathbb{R}^+, a * b = \frac{ab}{3}$

e) G$=\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} : 0 \neq a \in \mathbb{R} \right\}$, matris çarpması.

2.) $(G, *)$ bir grup olsun. Her $a, b \in G$ için $(a * b)^2 = a^2 * b^2$ ise G'nin değişmeli olduğunu gösterin.

3.) $G = \{ x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1 \}$ kümesi üzerinde

$$a_\circ b = \frac{a + b}{1 + ab}$$

işlemi tanımlanıyor. $(G, \circ)$ siteminin bir grup olduğunu gösterin.

4.) $(G, *)$ bir grup ve H de onun bir altgrubu olsun. $a \in G$ olmak üzere aşağıda verilen kümenin de bir altgrup olduğunu gösterin.

$$aHa^{-1} = \left\{ a * h * a^{-1} : h \in H \right\}.$$

5.) G kümesi 2×2 tipindeki tersi olan matrislerin kümesi olsun. G'nin bilinen matris çarpımı ile bir grup olduğunu biliyoruz. Aşağıda verilen H kümesinin G'nin ve K kümesinin de H'nin bir altgrubu olduğunu gösterin.

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R}, ad \neq 0 \right\}, \quad K = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}.$$

6.) $G = \left\{ a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \text{ veya } b \neq 0 \right\}$ kümesinin bilinen çarpma işlemine göre bir grup olduğunu gösterin. (İpucu: $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ için $a + b\sqrt{5} = c + d\sqrt{5} \iff a = c$ ve $b = d$.)

7.) $G = \left\{ \begin{bmatrix} a + 2b & 3b \\ -b & a \end{bmatrix} : a \text{ ve } b \text{ ikisi birden sıfır olmayan reel sayılar} \right\}$ kümesi bilinen matris çarpımı ile grup mudur? $a \neq 0$ ve $b = 0$ olacak şekildeki matrislerin kümesi H bir altgrup mudur?

8.) $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0 \right\}$ kümesi bilinen matris çarpımı ile grup mudur? $b = -1$ olacak şekildeki matrislerin kümesi H bir altgrup mudur?

9.) $G = \{ (a, b) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q} \}$ kümesi üzerinde $(a, b) * (c, d) = (a + c, 2^{-c}b + d)$ işlemi tanımlanıyor. $(G, *)$ grup mudur? Abelyen midir?

10.) $G = \{ (a, b) : a, b \in \mathbb{Z}, a \leqslant 0, b > 0 \}$ kümesi üzerinde $(a, b) * (c, d) = (a + c, bd)$ işlemi tanımlanıyor. $(G, *)$ grup mudur? Abelyen midir?

11.) Bir $(G, *)$ grubunda e birim elemanı göstermek üzere $a*b*c*d = e$ ise $b*c*d*a = e, c*d*a*b = e$ ve $d*a*b*c = e$ olduğunu gösterin.

12.) $(G, *)$ bir grup ve $a, b \in G$ için $a^2 = b^2 = (a*b)^2 = e$ ise $a*b = b*a$ olduğunu gösterin.

13.) $(\mathbb{R}^+, \div), (\mathbb{Z} \setminus \{1\}, +)$ ve $(\mathbb{Q}, \cdot)$ sistemleri neden birer grup değildir? Açıklayın.

14.) Aşağıdaki sistemlerden hangisi bir abelyen gruptur?

○ $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ○ $\big((0,1], \cdot\big)$ ○ $(\mathbb{R}^-, +)$ ⊗ $(3\mathbb{Z}, +)$ ○ Hiçbiri

15.) Aşağıdaki kümelerden hangisi yanında verilen işlemle bir monoiddir?

○ $\mathbb{N}, a*b = a+b+1$ ○ $\mathbb{Q}, a*b = a$ ⊗ $\mathbb{R}, a*b = a+b+ab$ ○ $\mathbb{Z}^+, a*b = \text{OBEB}(a,b)$ ○ H.B.

16.) Aşağıdaki sistemlerden hangisi bir grup değildir?

○ $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ○ $(\mathbb{C}, +)$ ⊗ $\big([0, \infty), +\big)$ ○ $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ ○ Hiçbiri

17.) Aşağıdaki kümelerden hangisi yanında verilen işlemle bir yarıgruptur?

○ $\mathbb{N}, a*b = a+2b$ ○ $\mathbb{R}^+, a*b = a^{b+1}$ ○ $\mathbb{Q}, a*b = 2a-2b$ ○ $\mathbb{Z}, a*b = |a+b|-1$ ⊗ Hiçbiri

18.) Bir A kümesinde tanımlanan $*$ işleminin birim elemanı olduğuna göre aş. hangisi kesinlikle doğrudur?

○ En az 2 elemanın tersi var ○ Birleşme öz. var ○ Değişme öz. var ○ $(A, *)$ bir monoid ⊗ H.B.

19.) Aşağıdaki kümelerden hangisi yanında verilen işlemle bir monoiddir?

○ $\mathbb{R}, a*b = b$ ○ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}, (a,b)*(c,d) = (a,d)$ ⊗ $\mathbb{Z}, a*b = a+b-1$ ○ $\mathbb{Q}, a*b = ab-1$ ○ H.B

20.) Aş. sistemlerin hangisi bir abelyen gruptur? ($a*b = $OKEK$(a,b)$ ve $A = \left\{ \sqrt{2} \cdot x : x \in \mathbb{Z} \right\}$ dir)

○ $(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, +)$ ○ $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, \cdot)$ ○ $(\mathbb{N}^+, *)$ ⊗ $(A, +)$ ○ Hiçbiri

Bölüm 9

Sayılabilirlik

Tanım 9.1 A ve B boş olmayan iki küme olsun. Eğer A'dan B'ye 1–1 ve örten bir fonksiyon yazılabiliyorsa A ve B kümelerine ***eş güçlüdür*** denir. (Boşküme sadece kendisi ile eş güçlüdür.)

Örnek 9.2 $A = \{ a, b, c, d \}$ ve $B = \{ 2, 3, 4, 5 \}$ olsun. $f = \{ (a, 4), (b, 3), c, 2, (d, 4) \}$ fonksiyonu 1–1 ve örten olup A ile B eş güçlüdür. Tam sayılar kümesi ile çift tamsayılar kümesi $2\mathbb{Z}$ eş güçlüdür, çünkü

$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z}, g(n) = 2n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon 1–1 ve örtendir.

Teorem 9.3 Kümeler arasında tanımlanan "eş güçlü olma" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Her A kümesi için $I_A : A \longrightarrow A$ birim dönüşümü 1–1 ve örten olduğundan A ile A eş güçlüdür.

A ile B eş güçlü ise $f : A \longrightarrow B$ 1–1 ve örten fonksiyon vardır. O halde, $f^{-1} : B \longrightarrow A$ 1–1 ve örten olup B ile A eş güçlüdür.

A ile B ve B ile C eş güçlü ise $f : A \longrightarrow B$ ve $g : B \longrightarrow C$ 1–1 ve örten fonksiyonları vardır. $g_o f : A \longrightarrow C$ 1–1 ve örten olduğundan A ile C eş güçlü olur.

Sonuç olarak bağıntının yansıyan, simetrik ve geçişken olduğu gösterilmiş olur. □

Tanım 9.4 Kendi öz alt kümesi ile eş güçlü olabilen kümelere ***sonsuz küme*** denir. Sonsuz olmayan kümelere de ***sonlu küme*** denir. Boş küme sonlu olarak tanımlanır. Başka bir deyişle; bir küme boş kümeyse veya k bir doğal sayı olmak üzere $\{ 0, 1, \dots, k \}$ kümesi ile eşgüçlü ise bu kümeye sonlu denir.

Örnek 9.5 Doğal sayılar kümesi sonsuzdur, çünkü $f : \mathbb{N} \longrightarrow A = \{ 2, 3, 4, \dots \}, f(n) = n + 2$ şeklinde tanımlanan fonksiyon 1–1 ve örtendir. $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ kümesi sonlu kümedir, çünkü B'den öz altkümesine bir fonksiyon örten olabilir ama 1–1 olamaz.

Tanım 9.6 Doğal sayıların herhangibir alt kümesiyle eş güçlü olan kümelere ***sayılabilir küme*** denir. Başka bir deyişle bir küme sonlu ise veya $\mathbb{N}$ ile eşgüçlü ise bu kümeye "sayılabilirdir" denir. Doğal sayılar kümesiyle eş güçlü olan kümelere ***sayılabilir sonsuz küme*** denir. (Aslında sayılabilir sonsuz küme hem sayılabilir hem de sonsuz olan kümedir.)

Örnek 9.7 Tamsayılar kümesi sayılabilirdir.

Çözüm: Aşağıdaki eşlemeyi düşünelim.

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & \dots \end{array}$$

O halde $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ çift ise;} \\ -\frac{n+1}{2}, & n \text{ tek ise.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun 1–1 ve örten olduğunu gösterelim. Bu daha önce gösterilmişti. (Bölüm 6, Alıştırma 6)

Teorem 9.8 A ve B sayılabir iki ayrık küme ise $A \cup B$ sayılabilirdir.

İspat: A ve B her ikisi de sonlu ise $A \cup B$ nin sonlu olduğu açıktır. O halde $A \cup B$ sayılabilirdir.

Kümelerden biri sonlu, diğeri sayılabilir sonsuz olsun. Mesela A sonlu olsun. $s(A) = k + 1$ dersek, o zaman

$$A = \{ a_0, a_1, a_2, \dots, a_k \} \quad \text{ve} \quad B = \{ b_0, b_1, b_2, \dots \}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda $f : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B$

$$f(n) = \begin{cases} a_n, & n \leqslant k \text{ ise;} \\ b_{n-k-1}, & n > k \text{ ise.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm 1–1 ve örtendir. O halde $A \cup B$ sayılabilirdir.

Öyleyse her iki kümenin de sonsuz (ve tabii ki sayılabilir) olduğunu kabul edelim. O zaman

$$A = \{ a_0, a_1, a_2, \dots \} \quad \text{ve} \quad B = \{ b_0, b_1, b_2, \dots \}$$

şeklinde yazalım. Şimdi $g : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B$ fonksiyonunu

$$g(n) = \begin{cases} a_{n/2}, & n \text{ çift ise;} \\ b_{(n-1)/2}, & n \text{ tek ise.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. g nin 1–1 ve örten olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Yani, $A \cup B$ ile $\mathbb{N}$ eşgüçlü olup $A \cup B$ sayılabilir ve sonsuzdur. □

Sonuç 9.9 **a)** A ile B ayrık olmasa da $A \cup B$ sayılabirdir.

b) Sonlu sayıdaki sayılabir kümenin birleşimi sayılabirdir.

Örnek 9.10 Rasyonel sayılar kümesi sayılabilirdir.

Çözüm: (İspat Cantor'a aittir) Önce pozitif rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}^+$'nın sayılabilir olduğunu gösterelim. $\mathbb{Q}^+$ kümesini bir sonsuz satırlı ve sütunlu bir tabloya; 1. satıra paydası 1 olanları, 2. satıra paydası 2 olanları (pay ve payda aralarında asal olmak üzere) v.s. yerleştirelim. Yani şu tablo oluşur:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
1/2	3/2	5/2	7/2	9/2	11/2	13/2	15/2	17/2	...
1/3	2/3	4/3	5/3	7/3	8/3	10/3	11/3	13/3	...
1/4	3/4	5/4	7/4	9/4	11/4	13/4	15/4	17/4	...
1/5	2/5	3/5	4/5	6/5	7/5	8/5	9/5	11/5	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Şimdi $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Q}^+$ arasında aşağıdaki eşlemeyi yapalım:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 1/2 & 2 & 3 & 3/2 & 1/3 & 1/4 & 2/3 & 5/2 & 4 & 5 & 7/2 & 4/3 & \dots \end{array}$$

Tablonun bu şekilde $\mathbb{N}$ kümesi ile 1–1 ve örten eşleneceği açıktır. O halde $\mathbb{Q}^+$ ile $\mathbb{N}$ eşgüçlüdür. $\mathbb{Q}^+$ ile $\mathbb{Q}^-$ kümesi arasında $x \longmapsto -x$ eşlemesi 1–1 ve örten olduğundan $\mathbb{Q}^-$ kümesi de sayılabilirdir. Ayrık iki (veya sonlu sayıda) sayılabilir kümenin birleşimi sayılabilir olduğundan $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ sayılabilir olur. □

Şimdi sayılamayan kümelerin de olduğunu görelim.

Teorem 9.11 $[0, 1]$ kapalı aralığı sayılamayan bir kümedir. (Dolayısıyla $\mathbb{R}$ sayılamaz.)

İspat: (1891 yılında yapılan bu ispatta kullanılan yöntem Cantor'un Köşegen Yöntemi olarak bilinir.) $[0, 1]$ aralığının sayılabilir olduğunu kabul edelim. (Bu aralığın sonsuz olduğu açıktır.) O halde 1–1 ve örten bir $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonu vardır. Başka bir deyişle; y_i, i–inci sayıyı ve $a_i, b_i, c_i, \dots$ ler de 0–9 arası rakamları temsil etmek üzere aşağıdaki sonsuz satırlı listede $[0, 1]$ aralığındaki bütün sayılar vardır:

$$
\begin{aligned}
y_0 &\longrightarrow 0.a_0a_1a_2a_3\ldots \\
y_1 &\longrightarrow 0.b_0b_1b_2b_3\ldots \\
y_2 &\longrightarrow 0.c_0c_1c_2c_3\ldots \\
y_3 &\longrightarrow 0.d_0d_1d_2d_3\ldots \\
\vdots & \quad \vdots
\end{aligned}
$$

$0.9999\ldots = 1$ olduğundan 1 sayısı da bu tablodadır. Şimdi:

$$
\begin{aligned}
&x_0 \text{ rakamını, } x_0 \notin \{\, a_0, 0, 9 \,\} \text{ şeklinde seçelim.} \\
&x_1 \text{ rakamını, } x_1 \notin \{\, b_1, 0, 9 \,\} \text{ şeklinde seçelim.} \\
&x_2 \text{ rakamını, } x_2 \notin \{\, c_2, 0, 9 \,\} \text{ şeklinde seçelim.} \\
&x_3 \text{ rakamını, } x_3 \notin \{\, d_3, 0, 9 \,\} \text{ şeklinde seçelim.} \\
&\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}
$$

Seçim yapılırken 0 ve 9'un seçilmemesi bazı sayıların birden fazla ondalık gösterimi olduğundandır; mesela $0.540000 = 0.5399999\ldots$ gibi. Şimdi de x sayısını

$$x = 0.x_0x_1x_2x_3\ldots$$

şeklinde oluşturalım. $x \in [0,1]$ olduğu açıktır. Ancak

$$
\begin{aligned}
x \neq y_0 &\text{ dır, çünkü } x_0 \neq a_0 \quad \text{(yani 1. basamaklar farklı)} \\
x \neq y_1 &\text{ dir, çünkü } x_1 \neq b_1 \quad \text{(yani 2. basamaklar farklı)} \\
x \neq y_2 &\text{ dir, çünkü } x_2 \neq c_2 \quad \text{(yani 3. basamaklar farklı)} \\
x \neq y_3 &\text{ dür, çünkü } x_3 \neq d_3 \quad \text{(yani 4. basamaklar farklı)} \\
\vdots \quad & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}
$$

Böylece x sayısının sonsuz listede olmadığı ortaya çıkar, yani sonsuz listede olmayan bir x sayısı üretilmiştir. Bu bir çelişkidir, çünkü sonsuz listede $[0,1]$ aralığındaki bütün sayılar vardı. O halde $[0,1]$ aralığı sayılabilir bir küme değildir. □

Teorem 9.12 Sayılabilir sonsuz miktardaki sayılabilir sonsuz kümenin birleşimi sayılabilir sonsuzdur.

İspat: Sayılabilir sonsuz sayıdaki kümeler aşağıdaki gibi olsun.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{\, a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots \,\} \\
A_2 &= \{\, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots \,\} \\
A_3 &= \{\, a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots \,\} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}
$$

Bu elemanları aşağıdaki tabloya yerleştirelim:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Daha sonra sırasıyla 1., 2., 3. . . . köşegendeki elemanları yukarıdan aşağıya doğru $\mathbb{N}$ kümesi ile eşleyelim. Yani aşağıdaki eşlemeyi yazalım:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{13} & a_{22} & a_{31} & a_{14} & a_{23} & a_{32} & a_{41} & \cdots \end{array}$$

Bu şekilde yapılan eşlemenin örten olduğu açıktır. Eğer bu kümeler ayrıksa bu eşleme 1–1 dir. Alt satırda aynı olan elemanlar sadece bir defa yazılırsa (ki bu durumda da alt satır bu kümelerin birleşimidir) bu eşleme 1–1 ve örtendir. $\square$

ALIŞTIRMALAR

1.) $A = \{1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, \ldots\}$ kümesi sayılabilir midir? İspatlayın.

2.) Çift tamsayılar kümesinin sayılabilir sonsuz bir küme olduğunu gösterin.

3.) Negatif tamsayılar kümesinin sonsuz bir küme olduğunu gösterin.

4.) $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ kümesi sayılabilir midir? Açıklayın

5.) $A = \left\{0, \dfrac{3}{2}, 2, \dfrac{5}{4}, 4, \dfrac{7}{6}, 6, \dfrac{9}{8}, \ldots\right\}$ kümesi sayılabilir midir? Neden?

6.) $A = \left\{1, \dfrac{1}{2}, 5, \dfrac{1}{4}, 17, \dfrac{1}{6}, 37, \dfrac{1}{8}, 65, \dfrac{1}{10}, 101, \ldots\right\}$ kümesi sayılabilir midir? Açıklayınız.

7.) Ayrık iki sonlu kümenin birleşiminin sonlu olduğunu ispatlayın.

8.) p:"Sonlu tane sonlu kümenin kartezyen çarpımı sayılabilirdir", q: "İki sonsuz kümenin kesişimi sonlu olabilir" önermeleri için:

⊗ p, q : Doğru ○ p : Doğru, q : Yanlış ○ p, q : Yanlış ○ p : Yanlış, q : Doğru ○ Hiçbiri

9.) Sayılabilir sonsuz miktardaki (boş olmayan) sonlu ve ayrık kümelerin birleşimi .... dur.

○ sonlu ⊗ sayılabilir sonsuz ○ sayılamaz sonsuz ○ sayılabilir sonlu ○ Hiçbiri

10.) $A \subsetneq B$ ve A kümesi sayılabilir ise B kümesi için aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

○ sonludur ○ sayılabilirdir ○ sonsuzdur ○ sayılamazdır ⊗ Hiçbiri

11.) p:"Hem sonsuz ve hem sayılamayan küme yoktur", q: "Bir sonlu küme ile sayılabilir kümenin birleşimi sonlu olamaz." önermeleri için:

○ p, q : Doğru ⊗ p, q : Yanlış ○ p : Doğru, q : Yanlış ○ p : Yanlış, q : Doğru ○ Hiçbiri

12.) Aşağıdaki küme çiftlerinden hangisi biribiriyle eş güçlüdür?

○ $\mathbb{N}$ ile $[0, 1]$ ○ $\mathbb{Q}$ ile irrasyonel sayılar ⊗ $\mathbb{Z}^-$ ile $\mathbb{Q}^+$ ○ $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{R}$ ○ Hiçbiri

13.) Aşağıdaki kümelerden hangisi $\mathbb{R}$ ile eşgüçlü <u>olamaz</u>?

○ $[-1, 1]$ ○ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ⊗ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ○ $[0, \infty)$ ○ Hiçbiri

14.) A ve B sayılabilir iki ayrık küme ise $A \cup B$ için aşağıdakilerden hangisi her zaman doğrudur?

○ sonludur ○ sayılabilir sonsuzdur ○ sonsuzdur ⊗ sayılabilirdir ○ Hiçbiri

15.) p:"Sonlu ve sayılamayan bir küme yoktur", q: "Sayılabilir miktardaki boş olmayan sonlu kümelerin birleşimi sonlu olmalıdır" önermeleri için:

○ p, q : Doğru ○ p, q : Yanlış ⊗ p : Doğru, q : Yanlış ○ p : Yanlış, q : Doğru ○ Hiçbiri

16.) p:"Sonlu olmayan her küme sayılamayan bir kümedir", q: "Sayılabilen ve sonlu olmayan kümeler vardır" önermeleri için:

⊗ p : Yanlış, q : Doğru ○ p, q : Doğru ○ p, q : Yanlış ○ p : Doğru, q : Yanlış ○ Hiçbiri

Bölüm 10

Doğal Sayıların İnşası

Tanım 10.1 Sonlu kümeler üzerinde tanımlanan eş güçlü olma bağıntısına göre bir X kümesinin denklik sınıfını $\overline{X}$ ile gösterelim. Boş kümenin denklik sınıfını 0 ile gösterelim. O halde $\overline{\emptyset} = 0$ yazabiliriz. Daha sonra $\overline{\{0\}} = 1$ diyelim. Bu şekilde devam edelim:

$$\begin{aligned} \overline{\{0,1\}} &= 2 \\ \overline{\{0,1,2\}} &= 3 \\ \overline{\{0,1,2,3\}} &= 4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bu şekilde elde edilen denklik sınıflarının herbirine bir ***doğal sayı*** denir. Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ ile gösterilir. Doğal sayıların yukardaki gibi seçilen temsilcilerine de ***kanonik temsilci*** denir.

Doğal Sayılarda Toplama ve Çarpma

Tanım 10.2 $x, y \in \mathbb{N}$ ve $x = \overline{A}, y = \overline{B}$ ayrıca $A \cap B = \emptyset$ olsun.

$$\boxed{x + y = \overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cup B}}$$

şeklinde tanımlanan işleme x ile y nin ***toplamı*** denir.

Örnek 10.3 2+3=5 olduğunu gösterelim. $A = \{a, b\}, B = \{1, 2, 3\}$ alalım. $2 = \overline{A}, 3 = \overline{B}$ diyebiliriz. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan:

$$2 + 3 = \overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cup B} = \overline{\{a, b, 1, 2, 3\}} = 5.$$

Toplama İşleminin Özellikleri:

1.) $\mathbb{N}, +$ işlemine göre kapalıdır.

2.) $\mathbb{N}, +$ işlemine göre birleşmeli ve değişmelidir.

3.) Etkisiz eleman $0 = \overline{\emptyset}$ dır; çünkü her $x = \overline{A} \in \mathbb{N}$ için

$$0 + x = x + 0 = \overline{A} + \overline{\emptyset} = \overline{A \cup \emptyset} = \overline{A} = x.$$

4.) Sadece 0'ın tersi vardır.

Teorem 10.4 Her $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ için

$$\boxed{x = y \text{ ve } z = t \Longrightarrow x + z = y + t.}$$

İspat: $x = \overline{A}, y = \overline{B}, z = \overline{C}, t = \overline{D}$ diyelim. Ayrıca $A \cap C = \emptyset, B \cap D = \emptyset$ olduğunu kabul edelim.

$$x = y \Longrightarrow f : A \longrightarrow B,\ \text{1–1 ve örten fonksiyonu vardır},$$
$$z = t \Longrightarrow g : C \longrightarrow D,\ \text{1–1 ve örten fonksiyonu vardır}.$$

Şimdi $h : A \cup C \longrightarrow B \cup D$ fonksiyonunu

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \text{ ise;} \\ g(x), & x \in C \text{ ise.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. h'nin 1–1 olduğunu gösterelim. $x, y \in A \cup C$ için $h(x) = h(y)$ olsun.

Durum 1. $\boldsymbol{x, y \in A}$**:** $f(x) = f(y)$ olup f 1–1 olduğundan $x = y$.

Durum 2. $\boldsymbol{x, y \in C}$**:** $g(x) = g(y)$ olup g 1–1 olduğundan $x = y$.

Durum 3. $\boldsymbol{x \in A, y \in C}$**:** $f(x) = g(y)$ olup $f(x) \in B$ ve $g(y) \in D$ dir. $B \cap D = \emptyset$ olduğundan böyle bir durum olamaz.

Durum 4. $\boldsymbol{x \in C, y \in A}$**:** $g(x) = f(y)$ olup $g(x) \in D$ ve $f(y) \in B$ dir. $B \cap D = \emptyset$ olduğundan böyle bir durum olamaz.

Sonuç olarak h 1–1 dir. Şimdi de h nin örten olduğunu gösterelim. $y \in B \cup D$ verilsin.

$$y \in B \Longrightarrow f \text{ örten olduğundan, } \exists\, x_0 \in A, f(x_0) = y \text{ olup } h(x_0) = f(x_0) = y$$
$$y \in D \Longrightarrow g \text{ örten olduğundan, } \exists\, x_1 \in C, g(x_1) = y \text{ olup } h(x_1) = g(x_1) = y$$

olup her iki halde de h örtendir.

Sonuç olarak h 1–1 ve örten olup $A \cup C$ ile $B \cup D$ eşgüçlüdür. O halde, $A \cap C = B \cap D = \emptyset$ olduğundan;

$$x + z = \overline{A} + \overline{C} = \overline{A \cup C} = \overline{B \cup D} = \overline{B} + \overline{D} = y + t.$$

Teorem 10.5 Her $x, y \in \mathbb{N}$ için

$$\boxed{x + y = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ ve } y = 0}$$

İspat: $x = \overline{A}, y = \overline{B}$ ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. $0 = \overline{\emptyset}$ olduğunu hatırlarsak:

$$\begin{aligned} x + y = 0 &\Longrightarrow \overline{A} + \overline{B} = \overline{\emptyset} \\ &\Longrightarrow \overline{A \cup B} = \overline{\emptyset} \\ &\Longrightarrow A \cup B \text{ ile } \emptyset \text{ eşgüçlü} \\ &\Longrightarrow A \cup B = \emptyset \quad \text{(Çünkü } \emptyset \text{ sadece kendisiyle eşgüçlü)} \\ &\Longrightarrow A = B = \emptyset \\ &\Longrightarrow x = y = \overline{\emptyset} = 0 \end{aligned}$$

Örnek 10.6 $x + 3 = 0$ önermesinin $\mathbb{N}$ deki çözümü yoktur, çünkü

$$x + 3 = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ ve } 3 = 0$$

olup $3 = 0$ önermesi her zaman yanlıştır.

Tanım 10.7 $x, y \in \mathbb{N}$ ve $x = \overline{A}$ ve $y = \overline{B}$ olsun.

$$\boxed{x \cdot y = \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A \times B}}$$

şeklinde tanımlanan işleme x ile y nin ***çarpımı*** denir.

Örnek 10.8 $2 \cdot 3 = 6$ olduğunu gösterelim. $A = \{\, a, b \,\}, B = \{\, 1, 2, 3 \,\}$ alalım. $2 = \overline{A}, 3 = \overline{B}$ diyebiliriz. Şimdi

$$2 \cdot 3 = \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A \times B} = \overline{\{\, (a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3) \,\}} = 6.$$

Çarpma İşleminin Özellikleri:

1.) $\mathbb{N}$, çarpma işlemine göre kapalıdır.

2.) $\mathbb{N}$, çarpma işlemine göre birleşmeli ve değişmelidir.

3.) Etkisiz eleman $1 = \overline{\{\, a \,\}}$ dır; çünkü her $x = \overline{A} \in \mathbb{N}$ için

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = \overline{A} \cdot \overline{\{\, a \,\}} = \overline{A \times \{\, a \,\}} = \overline{A} = x.$$

Burada $f : A \longrightarrow A \times \{\, a \,\}$, her $y \in A$ için $f(y) = (y, a)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun 1–1 ve örten olduğu gösterilebilir.

4.) Sadece 1'in tersi vardır.

Teorem 10.9 Her $x \in \mathbb{N}$ için

$$\boxed{x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.}$$

İspat: $x = \overline{A}$ alalım.

$$x \cdot 0 = \overline{A} \cdot \overline{\emptyset} = \overline{A \times \emptyset} = \overline{\emptyset} = 0$$

olur. Benzer şekilde $0 \cdot x = 0$ bulunur.

Teorem 10.10 Her $x, y, z, t \in \mathbb{N}$ için

$$\boxed{x = y \text{ ve } z = t \Longrightarrow xz = yt.}$$

İspat: $x = \overline{A}, y = \overline{B}, z = \overline{C}, t = \overline{D}$ diyelim.

$$x = y \Longrightarrow f : A \longrightarrow B,\ \text{1–1 ve örten fonksiyonu vardır,}$$
$$z = t \Longrightarrow g : C \longrightarrow D,\ \text{1–1 ve örten fonksiyonu vardır.}$$

Şimdi $h : A \times C \longrightarrow B \times D$ fonksiyonunu

$$h(a, c) = (f(a), g(c))$$

şeklinde tanımlayalım. h'nin 1–1 olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} h(a_1, c_1) = h(a_2, c_2) &\Longrightarrow (f(a_1), g(c_1)) = (f(a_2), g(c_2)) \\ &\Longrightarrow f(a_1) = f(a_2) \text{ ve } g(c_1) = g(c_2) \\ &\Longrightarrow f \text{ 1–1 olduğundan } a_1 = a_2 \text{ ve } g \text{ 1–1 olduğundan } c_1 = c_2 \\ &\Longrightarrow (a_1, c_1) = (a_2, c_2) \end{aligned}$$

olup h 1–1 dir. Şimdi de h nin örten olduğunu gösterelim. $y = (b, d) \in B \times D$ verilsin.

$$b \in B \text{ ve } f \text{ örten olduğundan } \exists a \in A, f(a) = b$$
$$d \in D \text{ ve } g \text{ örten olduğundan } \exists c \in C, g(c) = d.$$

Şimdi de $x = (a, c)$ seçilirse $h(x) = y$ olup h nin örten olduğu görülür.

Sonuç olarak h 1–1 ve örten olup $A \times C$ ile $B \times D$ eşgüçlüdür. O halde,

$$xz = \overline{A} \cdot \overline{C} = \overline{A \times C} = \overline{B \times D} = \overline{B} \cdot \overline{D} = yt.$$

Sonuç 10.11 Her $x, y \in \mathbb{N}$ ve $z \neq 0$ için

$$\boxed{x = y \iff xz = yz.}$$

Teorem 10.12 Her $x, y \in \mathbb{N}$ için

$$\boxed{xy = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ veya } y = 0.}$$

İspat: $x = \overline{A}, y = \overline{B}$ diyelim.

$$\begin{aligned} xy = 0 &\Longrightarrow \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{\emptyset} \\ &\Longrightarrow \overline{A \times B} = \overline{\emptyset} \\ &\Longrightarrow A \times B \text{ ile } \emptyset \text{ eşgüçlü} \\ &\Longrightarrow A \times B = \emptyset \quad (\text{Çünkü } \emptyset \text{ sadece kendisiyle eşgüçlü}) \\ &\Longrightarrow A = \emptyset \text{ veya } B = \emptyset \\ &\Longrightarrow x = \overline{A} = \overline{\emptyset} = 0 \text{ veya } y = \overline{B} = \overline{\emptyset} = 0 \end{aligned}$$

Doğal Sayılarda Sıralama

Tanım 10.13 $x, y \in \mathbb{N}$ iki tane doğal sayı olsun. x'in kanonik temsilcisi A ve y nin kanonik temsilcisi B olsun. Yani $x = \overline{A}, y = \overline{B}$. Buradan $x = y \iff A = B$ olduğu açıktır. Şimdi $x < y$ olmasını $A \subsetneq B$ şeklinde tanımlayalım. Ayrıca "$x < y$ veya $x = y$" yerine kısaca $x \leqslant y$ yazdığımızda

$$x \leqslant y \iff A \subseteq B$$

tanımını veririz. Bu şekilde tanımlanan $\leqslant$ bağıntısının bir sıralama bağıntısı olduğu kolayca görülür. Ancak $x \leqslant y$ tanımı aşağıdaki gibi de verilir ve bu tanım daha sık kullanılır:

$$x < y \iff x + k = y \text{ olacak şekilde en az bir } 1 \leqslant k \in \mathbb{N} \text{ var.}$$

Teorem 10.14 Her $x, y \in \mathbb{N}$ için $x < y, x = y$ ve $y < x$ önermelerinden sadece biri doğrudur. Doğal sayılar kümesinin en küçük elemanı sıfırdır.

Teorem 10.15 Doğal sayılar kümesinde tanımlanan $\leqslant$ bağıntısı bir tam sıralama bağıntısıdır.

Teorem 10.16 Her $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ için

(a) $x < y \Longrightarrow x + z < y + z$ **(b)** $x < y, z < w \Longrightarrow x + z < y + w$
(c) $x < y \Longrightarrow x + 1 \leqslant y$ **(d)** $x < y, z \neq 0 \Longrightarrow xz < yz$
(e) $x < y, z < w \Longrightarrow xz < yw$

İspat (a):

$$\begin{aligned} x < y &\Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^+, x + k = y \\ &\Longrightarrow x + k + z = y + z \\ &\Longrightarrow (x + z) + k = y + z \\ &\Longrightarrow x + z < y + z \end{aligned}$$

İspat (b):

$$\begin{aligned} x < y, z < w &\Longrightarrow \exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{N}^+, x + k_1 = y \text{ ve } z + k_2 = w \\ &\Longrightarrow (x + k_1) + (z + k_2) = y + w \\ &\Longrightarrow (x + z) + (k_1 + k_2) = y + w \\ &\Longrightarrow x + z < y + z, \text{ çünkü } k_1 + k_2 \geqslant 1 \end{aligned}$$

İspat (c): $x < y \Longrightarrow x + k = y$ olacak şekilde $1 \leqslant k \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $k = 1$ ise $x + 1 = y$ dir. Aksi halde $k \geqslant 2$ olup $(x + 1) + k_1 = y$ olup burada $k_1 \geqslant 1$ dir; yani $x + 1 < y$ olur. Sonuc olarak $x + 1 \leqslant y$ olur.

İspat (d): $z \neq 0$ olsun. Çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği olduğunu göstermek kolaydır. O halde:

$$\begin{aligned} x < y &\Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^+, x + k = y \\ &\Longrightarrow (x+k)z = yz \\ &\Longrightarrow xz + kz = yz \\ &\Longrightarrow xz < yz, \text{ çünkü } kz \geqslant 1 \end{aligned}$$

İspat (e):

$$\begin{aligned} x < y, z < w &\Longrightarrow \exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{N}^+, x + k_1 = y \text{ ve } z + k_2 = w \\ &\Longrightarrow (x+k_1)(z+k_2) = yw \\ &\Longrightarrow xz + \underbrace{xk_2}_{\geqslant 0} + \underbrace{k_1 z}_{\geqslant 0} + \underbrace{k_1 k_2}_{\geqslant 1} = yw \\ &\Longrightarrow x + z < y + z, \text{ çünkü } (xk_2 + k_1 z + k_1 k_2) \geqslant 1 \end{aligned}$$

İki Doğal Sayının Farkı ve Bölümü

Tanım 10.17 $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a + x = b$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{N}$ varsa bu sayıya b ***ile*** a***'nın farkı*** denir ve $x = b - a$ yazılır. Bu durumda $a, b \in \mathbb{N}$ için

$$a \leqslant b \iff b - a \in \mathbb{N}$$

olduğu açıktır.

Tanım 10.18 $a, b \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a \cdot x = b$ olacak şekilde en az bir $x \in \mathbb{N}$ varsa a, b***'yi böler*** denir ve $a \big| b$ yazılır. Bu durumda x doğal sayısına b ***ile*** a***'nın bölümü*** denir ve $x = b \div a$ yazılır.

$$a \big| b \iff b \div a \in \mathbb{N}.$$

Örnek 10.19 $x, y, z \in \mathbb{N}$ olsun. $(z+x) - (y+x) \in \mathbb{N}$ veya $z - y \in \mathbb{N}$ ise $(z+x) - (y+x) = z - y$ olduğunu gösterelim.

Durum 1. $(z+x) - (y+x) = n \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\begin{aligned} (z+x) - (y+x) = n &\Longrightarrow z + x = (y+x) + n \\ &\Longrightarrow z + x = (y+n) + x \\ &\Longrightarrow z = y + n \\ &\Longrightarrow n = z - y \end{aligned}$$

olup eşitlik gösterilir.

Durum 2. $z - y = m \in \mathbb{N}$ olsun.

$$\begin{aligned} z - y = m &\Longrightarrow z = y + m \\ &\Longrightarrow z + x = (y + m) + x \\ &\Longrightarrow z + x = (y + x) + m \\ &\Longrightarrow m = (z + x) - (y + x) \end{aligned}$$

olup eşitlik gösterilir.

Örnek 10.20 $x, y, z \in \mathbb{N}$ olsun. $(x - y) - z \in \mathbb{N}$ veya $x - (y + z) \in \mathbb{N}$ ise $(x - y) - z = x - (y + z)$ olduğunu gösterelim.

Durum 1. $(x - y) - z = n \in \mathbb{N}$ ve $x - y = t$ diyelim.

$$\begin{aligned} (x - y) - z = n, \quad x - y = t &\Longrightarrow x = y + t, \quad t - z = n \\ &\Longrightarrow x = y + t, \quad t = z + n \\ &\Longrightarrow x = y + (z + n) = (y + z) + n \\ &\Longrightarrow n = x - (y + z) \end{aligned}$$

olup eşitlik gösterilir.

Durum 2. $x - (y + z) = m$ diyelim.

$$\begin{aligned} x - (y + z) = m &\Longrightarrow x = m + (y + z) = y + (z + m) \\ &\Longrightarrow z + m = x - y \\ &\Longrightarrow m = (x - y) - z \end{aligned}$$

olup eşitlik gösterilir.

Örnek 10.21 $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ olsun.

$$a \big| b \text{ ve } c \big| d \Longrightarrow (ac) \big| (bd) \quad \text{olup} \quad (bd) \div (ac) = (b \div a)(d \div c)$$

olduğunu gösterin.

Çözüm:

$$\begin{aligned} a \big| b &\Longrightarrow b = ak_1 \text{ olacak şekilde } k_1 \in \mathbb{N} \text{ var, } k_1 = b \div a, \\ c \big| d &\Longrightarrow d = ck_2 \text{ olacak şekilde } k_2 \in \mathbb{N} \text{ var, } k_2 = d \div c \\ \text{Taraf tarafa çarparsak:} \quad bd &= (ak_1)(ck_2) = (ac)(k_1 k_2) \\ &\Longrightarrow k_1 k_2 \in \mathbb{N} \text{ olup } (ac) \big| (bd). \end{aligned}$$

Ayrıca $(bd) \div (ac) = k_1 k_2 = (b \div a)(d \div c)$ elde edilir.

Örnek 10.22 $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki önermeyi ispatlayın:

$$x \big| y \text{ ve } z \big| w \Longrightarrow (y \div x) + (w \div z) = (xw + yz) \div (xz)$$

Çözüm: $x \big| y \Longrightarrow y = xk_1$ olacak şekilde bir $k_1 \in \mathbb{N}$ vardır ve burada $k_1 = y \div x$ yazılır. Yine, $z \big| w \Longrightarrow w = zk_2$ olacak şekilde bir $k_2 \in \mathbb{N}$ vardır ve burada $k_2 = w \div z$ yazılır. Şimdi

$$xw + yz = x(zk_2) + (xk_1)z = xz(k_1 + k_2)$$

olup $(xz) \big| (xw + yz)$ olur ve $(xw + yz) \div (xz) = k_1 + k_2$ yazılır. Buradan k_1 ve k_2 yerine yazılırsa:

$$(xw + yz) \div (xz) = (y \div x) + (w \div z)$$

elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

1.) Doğal sayılarda tanımlanan toplama işleminin birleşme özelliği olduğunu gösterin.

2.) Doğal sayılarda tanımlanan toplama işleminin değişme özelliği olduğunu gösterin.

3.) Doğal sayılarda tanımlanan çarpma işleminin birleşme özelliği olduğunu gösterin.

4.) Doğal sayılarda tanımlanan çarpma işleminin değişme özelliği olduğunu gösterin.

5.) $\mathbb{N}$'de tanımlanan çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma özelliği olduğunu gösterin. Çarpmanın değişme özelliği olduğundan sağdan dağılma özelliğinin olduğunu söyleyebilir miyiz?

6.) $a, b, c \in \mathbb{N}$ olsun. $a \big| b$ ve $a \big| c$ ise $a \big| (b + c)$ olduğunu ve $(b + c) \div a = (b \div a) + (c \div a)$ olduğunu gösterin.

7.) $x, y, z \in \mathbb{N}$ ve $y \neq 0$ olsun. Bu durumda $(yz) \big| (xy)$ ve $z \big| x$ ise $(xy) \div (yz) = x \div z$ olduğunu gösterin.

Bölüm 11

Tümevarım İlkesi

Tümevarım İlkesi: $a \in \mathbb{N}$ olmak üzere $N_a = \{\, x \in \mathbb{N} : x \geqslant a \,\}$ kümesi üzerinde bir $P(n)$ açık önermesi tanımlı olsun. Eğer $P(a)$ önermesi doğruysa ve $P(k)$ doğru iken $P(k+1)$ de doğruysa; başka bir deyişle

$$P(k) \Longrightarrow P(k+1)$$

önermesi doğruysa o zaman her $n \in N_a$ için $P(n)$ doğrudur.

Örnek 11.1 Tümevarım yöntemiyle her $1 \leqslant n \in \mathbb{N}$ için

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

olduğunu gösterelim. $P(n)$ önermesi "$1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$" olsun. $n = 1$ için eşitliğin her iki tarafı da 1'e eşit olduğunudan $P(1)$ doğrudur. Şimdi de önermenin k için doğru olduğunu kabul edip $k+1$ için doğru olduğunu gösterelim. $P(k)$ doğru olsun.

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} &\Longrightarrow 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\
&\Longrightarrow 1 + 2 + \cdots + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) \\
&\Longrightarrow 1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

olup $P(k+1)$ de doğrudur. Tümevarımdan dolayı her $1 \leqslant n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.

Örnek 11.2 Her $n \in \mathbb{N}$ için $3 \big| (4^n - 1)$ olduğunu gösterelim. $P(n)$ önermesi $3 \big| (4^n - 1)$ olsun. $n = 0$ için $3 \big| 0$ olup önerme doğrudur. Şimdi

$$\begin{aligned}
3 \big| (4^k - 1) &\Longrightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}, (4^k - 1) = 3m \\
&\Longrightarrow 4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 1 = 4(3m+1) - 1 = 12m + 3 = 3(4m+1)
\end{aligned}$$

olup $4m+1$ de bir doğal sayı olduğundan $3 \big| (4^{k+1} - 1)$ dir. Yani $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$ doğrudur. Tümevarımdan, her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.

Örnek 11.3 Her $3 \leqslant n \in \mathbb{N}$ için $n^2 < 3^n$ olduğunu gösterelim. $P(n)$ önermesi $n^2 < 3^n$ olsun. $n = 3$ için $9 < 27$ olup önerme doğrudur. Şimdi $P(n)$'in doğru olduğunu kabul edip $P(n+1)$'in doğru olduğunu gösterelim. $n^2 < 3^n$ olsun. Eşitsizliğin her iki tarafını 3 ile çarparsak $3n^2 < 3^{n+1}$ elde ederiz. $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ olup $n \geqslant 3$ için $n^2 + 2n + 1 < 3n^2$ yani $2n^2 - 2n - 1 > 0$ olduğunu göstereceğiz. Şimdi $p(n) = 2n^2 - 2n - 1$ polinomunun kökleri

$$n_{1,2} = \frac{2 \mp \sqrt{12}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

olup büyük kök 3 den küçüktür.($\sqrt{3} \approx 1.7$ alınırsa) Polinom kökler dışında pozitif olduğundan $n \geqslant 3$ için $p(n) \geqslant 0$ dır. Yani $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ doğrudur. Tümevarımdan, her $3 \leqslant n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.

İyi Sıralılık İlkesi: Doğal sayılar kümesinin boş olmayan her alt kümesinin (bilinen $\leqslant$ bağıntısına göre) bir en küçük elemanı vardır.

Teorem 11.4 Tümevarım ilkesi ile iyi sıralılık ilkesi birbirine denktir.

İspat: (Tümevarım $\Longrightarrow$ İyi sıralılık) Tümevarım ilkesinin doğru olduğunu kabul edelim ve $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{N}$ alalım. Yeni bir S kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$S = \{\, x \in \mathbb{N} : \text{ Her } t \in T \text{ için } x \leqslant t \,\}.$$

Her $t \in T$ için $0 \leqslant t$ olacağından (çünkü 0, doğal sayıların en küçük elemanı) $0 \in S$ dir. Eğer S ile T'nin ortak bir elemanı varsa bu eleman T nin en küçük elemanıdır ve tek türlü belirlidir.

Şimdi $S \cap T = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. $s \in S$ ise ve $t \in T$ herhangibir eleman ise $s < t$ olmalıdır. O halde $s + 1 \leqslant t$ dir. Yani $s \in S \Longrightarrow s + 1 \in S$ olup; $S \cap T = \emptyset$ ise "$P(n) : n \in S$" önermesi her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olur (tümevarımdan). O halde $S = \mathbb{N}$ olmalıdır. O zaman $T = \emptyset$ olur ve bu da T'nin boş olmamasıyla çelişir. O halde $S \cap T \neq \emptyset$ olup $\mathbb{N}$ iyi sıralıdır.

İspat: (İyi sıralılık $\Longrightarrow$ Tümevarım) a bir doğal sayı olmak üzere $N_a = \{\, x \in \mathbb{N} : x \geqslant a \,\}$ kümesinde tanımlı bir $P(n)$ açık önermesi verilsin. $P(n)$ önermelerinin doğru olduğu doğal sayıların kümesine S diyelim.

$$S = \{\, n \in N_a : P(n) \text{ doğru} \,\}.$$

$S \subseteq N_a$ olduğu açıktır. Biz $S = N_a$ olduğunu göstereceğiz. $S \neq N_a$ olduğunu kabul edelim. O zaman $N_a \setminus S \neq \emptyset$ olur. O halde, iyi sıralılık ilkesinden, $N_a \setminus S$'nin bir en küçük elemanı t vardır. Yani $P(t)$ yanlıştır. $t - 1 \in S$ olup $k = t - 1$ alınırsa $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$ olacağından $P(t)$ doğru olur. Bu bir çelişkidir. O halde $N_a = S$ dir. □

ALIŞTIRMALAR

1.) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1} x^r = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ olduğunu gösteriniz. ($x \neq 1$.)

2.) Her $n \geqslant 5$ için $n^2 < 2^n$ olduğunu gösteriniz. ($n \in \mathbb{N}$.)

3.) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $6n+1$ biçiminde yazılan bir doğal sayının karesinin 1 eksiğinin 24 ile bölündüğünü gösterin.

4.) $\{\, a_n \,\}$ dizisinin genel terimi $a_n = 3^{2n+4} - 2^{2n}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $5 | a_n$ olduğunu gösteriniz. (İpucu: $a_{n+1} + a_n$ ifadesini kullanın.)

5.) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r(r+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ olduğunu gösteriniz.

6.) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ olduğunu gösteriniz.

7.) $a > -1$ reel sayısı ve her n pozitif tamsayısı için $(1+a)^n \geqslant 1+na$ olduğunu gösterin. (Bu eşitsizliğe Bernoulli Eşitsizliği denir.)

8.) Tümevarımla n elemanlı bir kümenin 2^n tane alt kümesinin olduğunu gösteriniz.

9.) Tümevarımla $3^{6n} \equiv 1 \pmod 7$ olduğunu gösteriniz.

10.) $3^n + 4^n \leqslant 5^n$ önermesi n'nin hangi değerleri için doğrudur. İspatlayınız.

11.) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\displaystyle\sum_{r=1}^{2n} (-1)^r r^3 = n^2(4n+3)$ olduğunu gösteriniz.

12.) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + n(n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$ midir? Neden?

13.) $\forall n \geqslant 0$ doğal sayısı için $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ sayısının 11'e tam bölündüğünü gösterin.

14.) Tümevarımla her $n \geqslant 1$ için $\displaystyle\prod_{r=1}^{n} \frac{2r-1}{r} = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$ olduğunu gösteriniz.

15.) Tümevarımla her $n \geqslant 2$ için $\displaystyle\prod_{r=2}^{n} \frac{r^2}{r^2-1} = \frac{2n}{n+1}$ olduğunu gösteriniz.

16.) Her $n \geqslant 1$ doğal sayısı için $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^{k-1} = n\,2^n$ olduğunu gösterin.

17.) $n \geqslant 1$ olmak üzere; $12^n + 10$ sayısının 11'e tam bölündüğünü tümevarımla gösterin.

18.) Her $n \geqslant 1$ doğal sayısı için aşağıda eşitliği ispatlayın:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

19.) Tümevarımla her $1 \leqslant n \in \mathbb{N}$ için $6 \,\Big|\, n(2n+1)(7n+1)$ olduğunu gösterin.

20.) Her $3 \leqslant n \in \mathbb{N}$ için $\quad 2^n > 2n+1 \quad$ olduğunu tümevarımla gösterin.

Bölüm 12

Tamsayılar

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesinde her $(a,b),(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için

$$\boxed{(a,b)\sim(c,d) \iff a+d=b+c}$$

şeklinde tanımlanan $\sim$ bağıntısını ele alalım. Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. O halde bu bağıntı $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ kümesini denklik sınıflarına ayırır. (a,b) elemanının denklik sınıfını $\overline{(a,b)}$ ile gösterelim. Bir kaç örnek verelim:

$$\begin{aligned}
\overline{(3,1)} &= \{\,(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : (x,y)\mid(3,1)\,\}\\
&= \{\,(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : x+1=y+3\,\}\\
&= \{\,(2,0),(3,1),(4,2),\dots\,\}\,.\\
\overline{(0,4)} &= \{\,(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : (x,y)\mid(0,4)\,\}\\
&= \{\,(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : x+4=y\,\}\\
&= \{\,(0,4),(1,5),(2,6),\dots\,\}\,.
\end{aligned}$$

Tanım 12.1 $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ olmak üzere (a,b)'nin $\sim$ bağıntısına göre olan $\overline{(a,b)}$ denklik sınıfına bir ***tamsayı*** denir. Bu durumda, mesela, $\overline{(1,0)},\overline{(3,9)}$ birer tamsayıdır. Tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}$ ile gösterilir.

Tamsayılarda Toplama ve Çarpma

Tanım 12.2 $x,y\in\mathbb{Z}$ ve $x=\overline{(a,b)}, y=\overline{(c,d)}$ olsun. Bu durumda

$$\boxed{x+y=\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(a+c,b+d)}}$$

şeklinde tanımlanan işleme ***iki tamsayının toplamı*** denir. Ayrıca

$$\boxed{x\cdot y=\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)}=\overline{(ac+bd,ad+bc)}}$$

şeklinde tanımlanan işleme ***iki tamsayının çarpımı*** denir.

Toplama İşleminin Özellikleri:

1.) $\mathbb{Z}, +$ işlemine göre kapalıdır, çünkü $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ise $a + c, b + d \in \mathbb{N}$ dir.

2.) $\mathbb{Z}, +$ işlemine göre birleşmeli ve değişmelidir. Çünkü, $x = \overline{(a, b)}, y = \overline{(c, d)}$ ise

$$x + y = \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)} = \overline{(c + a, d + b)} = \overline{(c, d)} + \overline{(a, b)} = y + x.$$

Ayrıca $z = \overline{(e, f)} \in \mathbb{Z}$ ise

$$(x + y) + z = \overline{((a + c) + e, (b + d) + f)} = \overline{(a + (c + e)), (b + (d + f))} = x + (y + z).$$

3.) $\mathbb{Z}$'de $+$ işleminin birim elemanı her $y \in \mathbb{N}$ için $\overline{(y, y)}$ dir. Çünkü her $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$ için

$$\overline{(a, b)} + \overline{(y, y)} = \overline{(a + y, b + y)} = \overline{(a, b)}$$

olur çünkü $(a + y) + b = (b + y) + a$ dır. Toplamanın birim elemanı 0 ile gösterilir ve $\overline{(0, 0)}$ alınabileceği gibi $\overline{(1, 1)}, \overline{(2, 2)}, \ldots$ alınabilir.

4.) Her $x = \overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$ tamsayısının $+$ işlemine göre tersi $\overline{(b, a)}$ dır, çünkü

$$\overline{(a, b)} + \overline{(b, a)} = \overline{(a + b, b + a)} = \overline{(0, 0)}.$$

Bu eleman $-x$ ile gösterilir.

Çarpma İşleminin Özellikleri:

1.) $\mathbb{Z}, \cdot$ işlemine göre kapalıdır, çünkü $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ise $ac + bd, ad + bc \in \mathbb{N}$ dir.

2.) $\mathbb{Z}, \cdot$ işlemine göre birleşmeli ve değişmelidir. Çünkü, $x = \overline{(a, b)}, y = \overline{(c, d)}$ ise

$$x \cdot y = \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(ca + db, cb + da)} = \overline{(c, d)} \cdot \overline{(a, b)} = y \cdot x.$$

Ayrıca $z = \overline{(e, f)} \in \mathbb{Z}$ ise

$$\begin{aligned}(xy)z &= \overline{(ac + bd, ad + bc)} \cdot \overline{(e, f)} = \overline{(ace + bde + adf + bcf, acf + bdf + ade + bce)} \ldots\ldots (\text{I}) \\ x(yz) &= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(ce + df, cf + de)} = \overline{(ace + adf + bcf + bde, acf + ade + bce + bdf)} \ldots\ldots (\text{II})\end{aligned}$$

olup (I)=(II) olduğu görülür.

3.) Birim elemanı bulalım. Her $\overline{(x, y)} \in \mathbb{Z}$ için

$$\overline{(x, y)} \cdot \overline{(a, b)} = \overline{(x, y)}$$

olacak şekilde $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$ arıyoruz.

$$\begin{aligned}\overline{(x, y)} \cdot \overline{(a, b)} = \overline{(x, y)} &\Longrightarrow \overline{(xa + yb, xb + ya)} = \overline{(x, y)} \\ &\Longrightarrow (xa + yb, xb + ya) \sim (x, y) \\ &\Longrightarrow (xa + yb) + y = (xb + ya) + x \\ &\Longrightarrow xa + y(b + 1) = x(b + 1) + ya\end{aligned}$$

Şimdi en son denklemin her x, y için doğru olması için x ve y'nin katsayıları eşit olmalıdır. O halde $a = b + 1$ dir. Buradan birim eleman

$$\overline{(a,b)} = \overline{(b+1,b)} = \overline{(1,0)}$$

bulunur.

4.) Çarpma işleminin toplama üzerine dağılma özelliği vardır. $x = \overline{(a,b)}, y = \overline{(c,d)}, z = \overline{(e,f)}$ alalım.

$$x(y+z) = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c+e,d+f)} = \overline{(ac+ae+bd+bf, ad+af+bc+be)} \qquad \ldots\ldots(\mathrm{I})$$

$$xy + xz = \overline{(ac+bd, ad+bc)} + \overline{(ae+bf, af+be)} = \overline{(ac+bd+ae+bf, ad+bc+af+be)} \qquad \ldots\ldots(\mathrm{II})$$

olup (I)=(II) olduğundan soldan dağılma özelliği gösterilmiş olur. Çarpma işlemi değişmeli olduğundan sağdan dağılma özelliği de vardır.

Teorem 12.3 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ olsun.

(a) $x + z = y + z \iff x = y$ **(b)** $xz = yz, z \neq 0 \iff x = y$

İspat (a): $x = \overline{(a,b)}, y = \overline{(c,d)}, z = \overline{(e,f)}$ alalım.

$$\begin{aligned}
x + z = y + z &\iff \overline{(a,b)} + \overline{(e,f)} = \overline{(c,d)} + \overline{(e,f)} \\
&\iff \overline{(a+e,b+f)} = \overline{(c+e,d+f)} \\
&\iff (a+e,b+f) \sim (c+e,d+f) \\
&\iff (a+e) + (d+f) = (b+f) + (c+e) \\
&\iff a + d = b + c \iff (a,b) \sim (c,d) \\
&\iff \overline{(a,b)} = \overline{(c,d)} \iff x = y
\end{aligned}$$

İspat (b): $z \neq 0$ olduğundan $e \neq f$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}
xz = yz &\iff \overline{(ae+bf, af+be)} = \overline{(ce+df, cf+de)} \\
&\iff (ae+bf, af+be) \sim (ce+df, cf+de) \\
&\iff ae + bf + cf + de = af + be + ce + df \\
&\iff e(a+d) + f(b+c) = e(b+c) + f(a+d) \\
&\iff a + d = b + c \qquad (\text{Çünkü } e \neq f) \\
&\iff (a,b) \sim (c,d) \iff \overline{(a,b)} = \overline{(c,d)} \iff x = y
\end{aligned}$$

Teorem 12.4 $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere:

(a) $\overline{(a,b)} = \overline{(x+k,k)} \iff a = b + k$

(b) $\overline{(a,b)} = \overline{(x,x)} \iff a = b$

(c) $\overline{(a,b)} = \overline{(x,x+k)} \iff b = a + k$

Sonuç 12.5 $(a,b) \in \mathbb{Z}$ olsun.

(a) $a > b$ ise $\overline{(a,b)} = \overline{(a-b,0)}$

(b) $a = b$ ise $\overline{(a,b)} = \overline{(0,0)}$

(c) $a < b$ ise $\overline{(a,b)} = \overline{(0,b-a)}$

Tanım 12.6 $(a,b) \in \mathbb{Z}$ olsun.

(a) $a > b$ ise $\overline{(a,b)} = \overline{(a-b,0)}$ tamsayısına ***pozitif tamsayı*** denir ve $a - b$ ile gösterilir. Pozitif tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}^+$ ile gösterilir.

(b) $a < b$ ise $\overline{(a,b)} = \overline{(0,b-a)}$ tamsayısına ***negatif tamsayı*** denir ve $-(b-a)$ ile gösterilir. Negatif tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}^-$ ile gösterilir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi a ve b nin durumuna göre bir tamsayı negatif, pozitif veya sıfırdır; ama bunlardan sadece bir tanesidir. O halde aşağıdaki ayrık birleşimi yazabiliriz:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{\,0\,\} \cup \mathbb{Z}^+$$

Tanım 12.7 x, y iki tamsayı ise $x + (-y)$ tamsayısına x ile y nin ***farkı*** denir ve kısaca $x - y$ ile gösterilir.

Örnek 12.8 $x + 4 = 3$ denkleminin çözümünün $x = -1$ olduğunu gösterelim. $x = \overline{(a,b)}, 3 = \overline{(3,0)}$ ve $4 = \overline{(4,0)}$ alalım.

$$\begin{aligned}
x + 4 = 3 &\Longrightarrow \overline{(a,b)} + \overline{(3,0)} = \overline{(4,0)} \\
&\Longrightarrow \overline{(a+3,b)} = \overline{(4,0)} \\
&\Longrightarrow (a+3,b) \sim (4,0) \\
&\Longrightarrow a + 3 = b + 4 \Longrightarrow a + 3 = (b+1) + 3 \Longrightarrow a = b + 1 \\
&\Longrightarrow x = \overline{(a,b)} = \overline{(a,a+1)} = \overline{(0,1)} = -1
\end{aligned}$$

Örnek 12.9 $3x - 11 = 7$ denkleminin çözümünün $x = 6$ olduğunu gösterelim. $x = \overline{(a,b)}, 3 =$

$\overline{(3,0)}, 11 = \overline{(11,0)}$ ve $7 = \overline{(7,0)}$ alalım. O zaman $-11 = \overline{(0,11)}$ olur.

$$\begin{aligned}
3x - 11 = 7 &\Longrightarrow 3x + (-11) = 7 \\
&\Longrightarrow \overline{(3,0)} \cdot \overline{(a,b)} + \overline{(0,11)} = \overline{(7,0)} \\
&\Longrightarrow \overline{(3a,3b)} + \overline{(0,11)} = \overline{(7,0)} \\
&\Longrightarrow \overline{(3a,3b+11)} = \overline{(7,0)} \\
&\Longrightarrow (3a,3b+11) \sim (7,0) \\
&\Longrightarrow 3a = (3b+11) + 7 = 3b + 18 \Longrightarrow 3a = 3(b+6) \Longrightarrow a = b+6 \\
&\Longrightarrow x = \overline{(a,b)} = \overline{(b+6,b)} = \overline{(6,0)} = 6
\end{aligned}$$

Tamsayılarda Sıralama

Tanım 12.10 Tamsayılarda ***küçük olma*** bağıntısını $x = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ ve $y = \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\boxed{x < y \iff a + d < b + c}$$

şeklinde tanımlayalım ve "$x \leqslant y \iff x < y$ veya $x = y$" şeklinde yazalım. Bu durumda $\leqslant$ bağıntısının bir tam sıralama bağıntısı olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $x < y$ yerine bazen $y > x$ yazılır.

Not 12.11 Bir $t = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ alalım.

$$t \text{ pozitif} \iff a > b \iff \overline{(a,b)} > \overline{(0,0)} \iff t > 0$$

Benzer şekilde

$$t \text{ negatif} \iff a < b \iff \overline{(a,b)} < \overline{(0,0)} \iff t < 0$$

Ayrıca

$$t \text{ pozitif} \iff \exists k \in \mathbb{N}^+, t = \overline{(k,0)} \quad \text{ve} \quad t \text{ negatif} \iff \exists k \in \mathbb{N}^+, t = \overline{(0,k)}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 12.12 $x, y, z, w, t \in \mathbb{Z}$ olsun.

(a) $x < y \iff x + z < y + z$

(b) $x < y, z < w \Longrightarrow x + z < y + w$

(c) $t > 0$ ise $xt > yt \iff x > y$

(d) $t < 0$ ise $xt > yt \iff x < y$

İspat: İspat boyunca $x = \overline{(a,b)}, y = \overline{(c,d)}, z = \overline{(e,f)}, w = \overline{(g,h)}$ alalım.

İspat (a)

$$\begin{aligned} x<y &\iff \overline{(a,b)}<\overline{(c,d)} \iff a+d<b+c \\ &\iff (a+d)+(e+f)<(b+c)+(e+f) \\ &\iff (a+e)+(d+f)<(b+f)+(c+e) \\ &\iff \overline{(a+e,b+f)}<\overline{(c+e,d+f)} \\ &\iff \overline{(a,b)}+\overline{(e,f)}<\overline{(c,d)}+\overline{(e,f)} \\ &\iff x+z<y+z \end{aligned}$$

İspat (b)

$$\begin{aligned} x<y, z<w &\Longrightarrow \overline{(a,b)}<\overline{(c,d)} \quad \text{ve} \quad \overline{(e,f)}<\overline{(g,h)} \\ &\Longrightarrow a+d<b+c \quad \text{ve} \quad e+h<f+g \\ &\Longrightarrow (a+d)+(e+h)<(b+c)+(f+g) \qquad \text{(Eşitsizlikler toplandı)} \\ &\Longrightarrow (a+e)+(d+h)<(b+f)+(c+g) \\ &\Longrightarrow \overline{(a+e,b+f)}<\overline{(c+g,d+h)} \\ &\Longrightarrow \overline{(a,b)}+\overline{(e,f)}<\overline{(c,d)}+\overline{(g,h)} \\ &\Longrightarrow x+z<y+w \end{aligned}$$

İspat (c) $t>0$ olduğundan, en az bir $k\in\mathbb{N}^+$ için $t=\overline{(k,0)}$ dır.

$$\begin{aligned} yt<xt &\iff \overline{(c,d)}\cdot\overline{(k,0)}<\overline{(a,b)}\cdot\overline{(k,0)} \\ &\iff \overline{(ck,dk)}<\overline{(ak,bk)} \\ &\iff ck+bk<dk+ak \iff k(c+b)<k(d+a) \\ &\iff c+b<d+a \quad (\text{Çünkü } k\neq 0) \\ &\iff \overline{(c,d)}<\overline{(a,b)} \iff y<x \end{aligned}$$

İspat (d) $t<0$ olduğundan, en az bir $k\in\mathbb{N}^+$ için $t=\overline{(0,k)}$ dır.

$$\begin{aligned} yt<xt &\iff \overline{(c,d)}\cdot\overline{(0,k)}<\overline{(a,b)}\cdot\overline{(0,k)} \\ &\iff \overline{(dk,ck)}<\overline{(bk,ak)} \\ &\iff dk+ak<ck+bk \iff k(a+d)<k(b+c) \\ &\iff a+d<b+c \quad (\text{Çünkü } k\neq 0) \\ &\iff \overline{(a,b)}<\overline{(c,d)} \iff x<y \end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1.) Aşağıdaki önermelerden hangisi neden doğrudur?

(a) $(0,0) \in \overline{(0,0)}$ **(b)** $(0,0) \in \overline{(1,1)}$ **(c)** $\overline{(0,0)} = \overline{(1,1)}$ **(d)** $\overline{(2,1)} \in (2,1)$

2.) $a, b \in \mathbb{N}$ olduğuna göre aşağıdaki önermelrin doğru olduğunu gösterin.

(a) $(a,a) \sim (b,b)$ **(b)** $(a+1,a) \sim (b+1,b)$ **(c)** $(a+1,b+1) \sim (a,b)$

3.) Aşağıdaki tamsayıları en sade şekilde yazın.

(a) $\overline{(a,b)} + \overline{(b,a)}$ **(b)** $\overline{(a,0)} + \overline{(b,0)}$ **(c)** $\overline{(a,a-1)} \cdot \overline{(a,a-2)}$ **(d)** $\overline{(0,a)} \cdot \overline{(0,a+1)}$

4.) $a, b, x, r \in \mathbb{N}$ olsun. Aşağıdaki eşitlikleri gösterin

(a) $\overline{(a+x,a)} = \overline{(a+1,1)}$ **(b)** $\overline{(a,b)} + \overline{(r,r)} = \overline{(a,b)}$ **(c)** $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(r,r)} = \overline{(r,r)}$

5.) $\overline{(a,b)} + \overline{(x,y)} = \overline{(c,d)}$ ise $\overline{(x,y)} = \overline{(c+b,d+a)}$ olduğunu gösterin.

6.) $(a,b) \sim (s,m)$ ve $(c,d) \sim (t,n)$ ise aşağıdaki denklikleri gösterin
(a) $(a+c,b+d) \sim (s+t,m+n)$ **(b)** $(ac+bd,ad+b) \sim (st+mn,sn+mt)$

7.) $(-3)+(-2) = -5$ olduğunu gösterin.

8.) $(-3)\cdot(-2) = 6$ olduğunu gösterin.

9.) Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $(-x)+(-y) = -(x+y)$ olduğunu gösterin.

10.) Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $(-x)+y = -(x+(-y))$ olduğunu gösterin.

11.) Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $x-(-y) = x+y$ olduğunu gösterin.

12.) Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $(-x)\cdot(-y) = x \cdot y$ olduğunu gösterin.

13.) $-1 < \overline{(s,t)} < 1$ ise $s = t$ olduğunu gösterin.

14.) Aşağıdaki açık önermelerin $\mathbb{Z}$'deki çözümlerini teoremleri kullanarak bulun.
(a) $x+2 < 7$ **(b)** $x+2 > x$ **(c)** $-x-2 < 4-2x$

15.) Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $x \cdot y = 0 \Longrightarrow x = 0$ veya $y = 0$ olduğunu gösterin.