Bölüm 3

KÜME KAVRAMI

Okuma Parçası

Bu derste, Kümeler Kuramını belitsel (aksiyomatik) incelemeyi amaçlamıyoruz. Burada, küme kavramını, sezgiye dayalı olarak *belirli nesnelerin bir topluluğu* diye tanımlayacak ve daha çok cebirsel özeliklerini inceleyeceğiz.

Her belitsel sistemin dayandığı bazı ilkel kavramlar vardır. Bu ilkel kavramları, o sistem içindeki başka nesneler ya da kavramlarla belirlemek mümkün değildir. Bunlara sistemin *tanımsız terimleri* ya da *ilkel terimleri* diyoruz. Bir belitsel yapı kurulurken, bu yapının dayanacağı tanımsız terimler açıklıkla ortaya konulur. Bundan sonraki her yeni tanım, bu tanımsız terimlerle ifade edilir; başka bir belirsiz kavram ya da bilinmeyen nesne yapıya giremez. Tabii, bir belitsel yapıyı mümkün olduğu kadar az sayıda tanımsız terime dayandırmak gerekir. Başka bir deyişle, bir belitsel sistemde, ötekiler cinsinden ifade edilebilecek kavramları, yapının tanımsız terimleri olarak almamak gerekir. Ayrıca, bir belitsel yapıda bu tanımsız terimlerin, kendilerine verilecek özeliklerinden başka özeliklere sahip olduklarını, ya da, bize alışkın olduğumuz bazı özelikleri ima ettiklerini varsaymayacağız.

Bu bölümde küme kavramını Georg Cantor (1845-1918)'un yaptığı gibi belirleyeceğiz. Hemen belirtelim ki, bu yöntemle kümeyi belirlemek, ileri aşamalarda, yapı içinde çelişki yaratır. Ama, ilk elde, amacımız yalnızca kümeler cebirini incelemek olduğu için, Cantor yönteminin eksikliği, bize, burada bir zarar vermeyecektir. Bunun yanında, bu yöntem, özellikle, konuya ilk başlayanlar için, belitsel yönteme göre çok daha kolay sezilebilir nitelikte olduğundan, *Kümeler Cebiri*'ne daha çabuk girebilme olanağı bulacağız. Zaten bu yöntemle kurulan kümeler kuramına *sezgisel* sıfatı verilir.

3.1 İLKEL KAVRAMLAR

3.1.1 Kümeler Kuramının Tanımsız Terimleri

Kümeler Kuramını kurmak için dört tanımsız terim alacağız:

1. öğe
2. küme
3. içerilme (elemanı olma)
4. nicelik sayısı

x herhangi bir nesne olsun. Buna bazan *belirsiz,* bazan da *değişken* denilir. İçinde x bulunan bir $p(x)$ önermesi (ifadesi) tanımlı olsun. Eğer bu önerme *doğru* ise, x nesnesi p önermesini *sağlıyor (doğruluyor)*, diyelim ve bunu, $p(x) = 1$ anlamına gelmek üzere, kısaca,

$$p(x)$$

simgesiyle belirtelim.

Eğer, $p(x)$ *yanlış* bir önerme ise, x nesnesi p önermesini *sağlamıyor (doğrulamıyor)* diyelim ve bunu da, $p(x)$ önermesinin değili anlamına gelmek üzere,

$$p'(x), \qquad \sim p(x), \qquad \neg p(x) \tag{3.1}$$

simgelerinden birisiyle belirtelim.

$$p(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p'(x) = 1 \tag{3.2}$$

olduğu açıktır.

p önermesini sağlayan bütün x nesnelerinin oluşturduğu topluluğu,

$$\{x \mid p(x)\} \qquad \text{ya da} \qquad \{x : p(x)\} \tag{3.3}$$

simgelerinden birisiyle gösterelim. (3.3) topluluğuna bir *küme,* bu topluluğu oluşturan her bir x nesnesine bu kümenin bir *öğesi (elemanı)* diyeceğiz.

Genellikle, öğeleri $a, b, \ldots, x, y, z$ gibi küçük harflerle ve kümeleri de $A, B, \ldots, X, Y, Z$ gibi büyük harflerle göstereceğiz.

3.1.2 Evrensel Küme

Evrensel küme deyimi, *"her şeyi içeren küme"* çağrışımı yapıyor. Bu çağrışımı en genel bir soru olarak ortaya atalım

Bütün kümelerin kümesi nedir?

Bu soru Kümeler Kuramında paradoks yaratan çetin bir sorudur. Geçen yüzyılın büyük matematikçilerini uğraştıran bu konuyu ileri bölümlerde ele alacağız. Şimdilik, her şeyi içeren bir kümeyi hiç düşünmeyeceğiz. Zaten her şeyi içeren bir kümeye gereksinim doğmayacaktır. Matematikte belli bir iş için belli bir küme üzerinde çalışırız. Bu küme doğal sayılar, tamsayılar, karmaşık sayılar, bir aralık üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar v.b. gibi, öğeleri kesinlikle bizce belirli olan kümelerdir. Bu demektir ki, üzerinde çalışacağımız evrensel kümenin ne olacağı başlangıçta saptanacaktır. Bu saptama işi çok kolaydır. Evrensel kümeyi, o andaki çalışmamıza konu olacak bütün öğeleri içerecek kadar büyük, o anda gereksiz öğeleri dışlayacak kadar küçük seçmeliyiz. Örneğin, çoğunlukla yapacağımız gibi, sayılarla ile ilgili işlemler yapıyorsak, evrensel küme olarak gerçel sayılar kümesini almak yetecektir; bu halde evrensel kümeyi, diyelim ki, bütün canlıları da içerecek büyüklükte seçmek gereksizdir. Evrensel kümenin, her seferinde ne olacağının, saptanması gereken bir belirsiz oluşu, kümeler cebirinde işleri zorlaştırıcı bir etken sanılabilir. Ama böyle bir zorluğun çıkmayacağını göreceğiz.

Belli bir iş için kullanacağımız evrensel kümeyi sözel olarak tanımlayabiliriz. Örneğin, çift tamsayılar deyimi kümeyi kesinlikle belirler. Bu işi matematiksel simgelerle yapmak işi kolaylaştıracak ve herkesin aynı kavramda anlaşmasını sağlayacaktır. Belli bir andaki işimizde kullanacağımız bütün x öğelerini seçen (belirleyen) bir Φ önermesi düşünelim. $\Phi(x)$ simgesi, x öğesinin Φ önermesini sağladığı anlamına gelir; yani $\Phi(x)$ önermesinin doğruluk değeri D (doğru) dir. Bu koşulu sağlayan bütün x öğelerinin oluşturduğu kümeye Φ nin belirlediği evrensel küme diyeceğiz. Bu kümeyi E_Φ ile göstereceğiz.

$$E_\Phi = \{x \mid \Phi(x)\} \tag{3.4}$$

Evrensel kümemiz başlangıçta belli olacağı için, onu belirleyen Φ önermesini her işlemde kullanmak, formüllerde yararsız bir kalabalık yaratacaktır. O nedenle, çok gerekmiyorsa, işlemlerimizde Φ önermesini hiç kullanmayız. Örneğin, E_Φ yerine E yazarız. Daha önemlisi, alt kümeleri kullanırken de bunu yaparız. Örneğin, doğal sayılar kümesini evrensel küme olarak almışsak, çift sayılardan oluşan A alt kümesini belirlemek için

$$A = \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge\ n \text{ çift tamsayıdır}\}$$

demek yerine,

$$A = \{n \,|n \text{ çift tamsayıdır}\}$$

yalın biçimini kullanacağız. Bunu matematiksel simgelerle ifade edelim. Φ nin belirlediği evrensel küme içinde bir p önermesini sağlayan x öğelerinin oluşturduğu A alt kümesini

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid \Phi(x) \wedge p(x)\} \\ &= \{x \mid (x \in E_\phi) \wedge p(x)\} \end{aligned}$$

biçimlerinden birisini yazmak yerine

$$A = \{x \mid p(x)\} \tag{3.5}$$

yalın biçiminde yazacağız.

Örnekler

1. Düzlem Geometri çalışırken, düzlemdeki bütün noktaların kümesini evrensel küme olarak seçmek yeterlidir.

2. Gerçel (real) sayılarla çalışırken, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesini evrensel küme olarak seçmek yeterlidir.

3. Nüfus konularıyla ilgili çalışmalar yapan bir sosyal bilimcinin, dünya nüfusunu evrensel küme olarak seçmesi yeterlidir.

3.1.3 Tümleyen Küme

Benzer olarak, p önermesini sağlamayan; yani, $p'(x)$ önermesini sağlayan bütün x nesnelerinin oluşturduğu topluluğu,

$$\{ \, x \mid p'(x) \, \} \tag{3.6}$$

simgesiyle gösterelim. Buna (3.5) kümesinin *tümleyen (tamlayan)* kümesi diyeceğiz.

Buna göre, E evrensel kümesini

$$E = \{x \mid p(x) \vee p'(x)\} \tag{3.7}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu yalın gösterimlerde kullanmadığımız $\Phi(x)$ önemesinin sağlandığını gizil biçimde kabul ediyoruz.

A kümesinin tümleyenini A', $\neg A$, A^c simgelerinden birisiyle göstereceğiz:

$$A' \;=\; \{ \, x \mid p'(x) \, \} \tag{3.8}$$

Bir a öğesinin A kümesine ait olduğunu,

$$a \in A \quad \text{ya da} \quad A \ni a$$

simgelerinden birisiyle gösterecek ve

"a öğesi (elemanı) A kümesine aittir", "a öğesi A kümesinin bir öğesidir",
"A kümesi a öğesini içerir,"

ifadelerinden birisiyle okuyacağız.

Tanımımız gereğince, $a \in A$ olması için, a nesnesinin p önermesini sağlaması gerekli ve yeterli koşuldur; yani $p(a)$ önermesi *doğru* olmalıdır. Öyleyse,

$$a \in A \quad \Leftrightarrow \quad p(a)$$

yazılabilir.

Bir b öğesi A kümesine ait değilse

$$b \notin A \quad \text{ya da} \quad A \not\ni b$$

simgelerinden birisiyle gösterecek ve

"b öğesi (elemanı) A kümesine ait değildir",
"b öğesi A kümesinin bir öğesi değildir",
"A kümesi b öğesini içermez,"

ifadelerinden birisiyle okuyacağız.

Tabii, buraya dek söylediklerimiz kümelerin varlığını garanti etmez. Bu nedenle, p bir önerme ise, (3.5) kümesinin varlığını, bir belit (aksiyom) olarak varsayacağız.

İyi Tanımlılık

Bir kümeyi tanımlamak demek, o kümenin içerdiği bütün öğeleri belirlemek demektir. Bunun için genel yöntemimiz, tanımlayacağımız kümenin içerdiği öğelerin sahip olduğu bütün özelikleri ve yalnızca onları ifade eden p önermesini belirledikten sonra, kümeyi (3.5) biçiminde yazmaktır. Böyle olduğunda, kümeye ait olan ve olmayan nesneler kesinkes belirlenmiş olur. Bu özeliğe, *kümenin iyi tanımlanması,* diyeceğiz. Her küme iyi tanımlı olmalıdır.

(3.5) kümesini belirleyen p önermesi, yalın bir önerme olabileceği gibi, bileşik bir önerme de olabilir.

3.1.4 Nicelik Sayısı

Bazan, bir kümede kaç öğe olduğunu bilmemiz gerekir. Bir kümenin öğelerini sayabiliyorsak, sonunda eriştiğimiz sayı, o kümenin nicelik sayısıdır. Ama, kümelerin çoğunun öğelerini sayamayız. Böyle olsa bile, her kümenin öğelerinin miktarını belirten bir kavramın (sayının) olması gerektiğini sezebiliyoruz. Bu nedenle, şu beliti varsayacağız.

Aksiyom 3.1.1. *[Nicelik Sayılarının varlığı] Her kümenin bir ve yalnız bir nicelik sayısı vardır. Sayılabilen kümeler için, nicelik sayısı, kümenin öğelerinin sayısıdır.*

Bir A kümesinin nicelik sayısı $\bar{\bar{A}}$, $\natural(A)$, $n(A)$, $\mathrm{card}(A)$ simgelerinden birisiyle gösterilir.

3.1.5 Sonlu ve Sonsuz Kümeler

Tanım 3.1.1. Nicelik sayısı bir doğal sayıya eşit olan kümeler sonludur. Sonlu olmayan kümeler de sonsuzdur.

Sonlu kümelerin öğelerini sayarak bitirebiliriz, ama sonsuz kümelerin öğelerini sayarak bitiremeyiz.

Örnekler:

1. Alfabemizdeki harflerden oluşan $\{a, b, c, \dots, y, z\}$ kümesi sonludur.
2. 1000 den küçük çift tamsayılar kümesi sonludur.
3. Bir çuval pirinçten oluşan küme sonludur.
4. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ Doğal Sayılar Kümesi sonsuzdur.
5. $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ Tamsayılar Kümesi sonsuzdur.
6. $\mathbb{R} =$ Gerçel Sayılar Kümesi sonsuzdur.
7. Düzlemdeki noktalar kümesi sonsuzdur.

3.2 Kümelerin Gösterimi

3.2.1 Niteleme Yöntemi

Niteleme Yöntemi (Öğelerin Ortak Özeliklerini Belirleme):
Kümeleri, genellikle (3.5) biçiminde gösteririz. Bu gösterimde p önermesi, kümenin öğelerinin belirleyici ve ayırıcı niteliklerini; yani, ortak özelliklerini belirtir. Bu nedenle, (3.5) gösterimine *Niteleme Yöntemi (Ortak Özelik Belirleme Yöntemi)* denilir.

3.2.2 Listeleme Yöntemi

Bazı özel hallerde, kümenin öğelerini tek tek yazmak ya da belirli bir kurala uyar biçimde sıralamak mümkün olabilir. Bu durumlarda, kümenin öğelerini $\{\}$ parantezi içine yazarız. Bu yönteme, *Kümenin Öğelerini Listeleme ;* $\{\}$ parantezine de, *küme parantezi* diyeceğiz. A kümesinin öğeleri $a, b, c, d, e, \ldots$ ise,

$$A = \{\ a, b, c, d, e, \ldots\ \} \tag{3.9}$$

yazarız. Örneğin, *tek tamsayılar kümesi*'nin *niteleme yöntemi* ile gösterimi,

$$\{\ x \mid x \textit{ tek tamsayıdır}\}$$

biçimindedir. Aynı kümeyi listeleme yöntemiyle gösterecek olursak,

$$\{\ \ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ \}$$

yazabiliriz. Birinci gösterimdeki "*x tek tamsayıdır* " önermesi, kümeyi belirleyen $p(x)$ önermesidir. İkincide ise, büyük parantez içinde verilen

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

sıralamasından, ... ile belirtilen yerlere yalnızca tek tamsayıların yazılması gerektiğini anlıyoruz. Tabii, bu tür bir gösterimi kullanırken, herkesin yazılı olmayan öğelerin ne olduğunu kesinlikle anlayacağından emin olmak gerekir; değilse yanlış anlamalar doğabilir. Eğer yanlış anlam çıkacağı kuşkusu varsa, *ortak özelik belirtme yöntemi*'ne geçmek daha uygun olur.

Bu örnekte görüldüğü gibi, listeleme yöntemi, bazı hallerde daha kolay algılanabilir. Ancak, kümelerin büyük çoğunluğu için, listeleme yöntemi olanaksızdır. Örneğin, sınıfınızdaki bütün öğrencilerin adlarını yazarsanız, sınıftaki öğrencilerden oluşan kümenin öğelerini listelemiş olursunuz. Ama, dünyadaki bütün insanların kümesini listeleyemezsiniz.

3.2.3 Venn Diyagramı

Kümeler cebirinde birçok bağıntıyı daha somut biçimde görebilmek için kümeleri düzlemde kapalı bir eğri ile sınırlanmış bölgeler olarak temsil ederiz. Bu yöntemi ilk kez İngiliz Matematikçisi John Venn uyguladığı için, kümeleri temsil eden böyle sekillere *Venn diyagramları,* denilir.