Bölüm 7

KÜME AİLELERİ

7.1 İNDİSLİ KÜMELER

Eğer incelediğimiz kümelerin sayısı, alfabenin harflerinden daha çok değilse, onları $A, B, \ldots, W$ gibi harflerle temsil edebiliriz. Eğer elimizde albenin harflerinden daha çok ve sayıları n tane olan kümeler varsa, bu kümeleri $A_1, A_2, \ldots, A_n$ simgeleriyle temsil edebiliriz. Bu durumda, her bir A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ kümesi i ile indislenmiştir (damgalanmıştır), diyeceğiz. Şimdi bu kavramı biraz daha genelleştirelim. Herhangi bir I kümesi düşünelim. Her $i \in I$ öğesine karşılık bir A_i kümesi var olsun. Bütün bu kümelerden oluşan topluluğu $\mathscr{A}$ ile gösterelim.

$$\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\} \tag{7.1}$$

olsun. (7.1) gereğince, $\mathscr{A}$ topluluğu, öğeleri A_i kümeleri olan bir kümedir. Ancak "Kümelerin kümesi" kavramı, bizi, ileride açıklayacağımız *Russel paradoksuna* götürdüğü için, bu deyimi kullanmayacak, bunun yerine, $\mathscr{A}$ ya bir *"kümeler ailesi"* , bir *"kümeler topluluğu"* ya da bir *"sınıf"* diyeceğiz. Burada I kümesine ailenin indis (damga, index) kümesi, her bir A_i kümesine i ile indislenmiş (damgalanmış) küme ve herbir $i \in I$ öğesine de bir indis diyeceğiz.

Bu aileyi bazan

$$\mathscr{A} = \{A_i\}_{i \in I} \tag{7.2}$$

biçiminde yazacağız. Hattâ, aileyi oluşturan kümeler $A_1, A_2, \ldots, A_n$ şeklindeyse, bunu

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \tag{7.3}$$

diye de gösterebiliriz.

7.1.1 Kümeler Ailesinin Bileşimi

Bir $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ ailesi verilsin. Bu ailenin bileşimi öyle bir kümedir ki, bir x öğesinin bu bileşime ait olması için gerekli ve yeterli koşul, en az bir $\alpha \in I$ için

$x \in A_\alpha$ olmasıdır. Bu bileşimi

$$\cup\mathscr{A} = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A = \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}\{A_i \mid i \in I\} \tag{7.4}$$

simgelerinden birisiyle temsil edeceğiz. Bileşim tanımını simgelerle açıklamak istersek,

$$\cup\mathscr{A} = \bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists\alpha(\alpha \in I) \wedge (x \in A_\alpha)\} \tag{7.5}$$

yazabiliriz. Burada, sağ yandaki ifadeyi şöyle okuyacağız: "Kümenin içerdiği x öğeleri şu özeliğe sahiptir: öyle bir α var ki, α I indis kümesine ve x ise A_α kümesine aittir".

Burada, I indis kümesi iki öğeli ise (7.5) ifadesi, özel olarak, (5.1) biçimini alır.

7.1.2 Kümeler Ailesinin Arakesiti

Bir $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ ailesi verilsin. Bu ailenin arakesiti öyle bir kümedir ki, bir x öğesinin bu arakesite ait olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $\alpha \in I$ için $x \in A_\alpha$ olmasıdır. Bu arakesiti

$$\cap\mathscr{A} = \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A = \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}\{A_i \mid i \in I\} \tag{7.6}$$

simgelerinden birisiyle temsil edeceğiz. Arakesit tanımını simgelerle açıklamak istersek,

$$\cap\mathscr{A} = \bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists\alpha((\alpha \in I) \Rightarrow (x \in A_\alpha))\} \tag{7.7}$$

yazabiliriz. Burada, sağ yandaki ifadeyi şöyle okuyacağız: "Kümenin içerdiği x öğeleri şu özeliğe sahiptir: her α öğesi için, α nın I indis kümesine ait olması, x öğesinin A_α kümesine ait olmasını gerektirir".

Burada, I indis kümesi iki öğeli ise (7.7) ifadesi, özel olarak, (5.2) biçimini alır.

7.1.3 Ayrık Aile

Bir $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ ailesi verilsin. Eğer bu aileyi oluşturan kümeler ikişer ikişer birbirlerinden ayrık iseler; yani

$$(\alpha, \beta \in I) \wedge (\alpha \neq \beta) \Rightarrow A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset \tag{7.8}$$

ise, $\mathscr{A}$ ailesine ayrıktır, denilir.

7.1.4 Kuvvet Kümesi

Bir A kümesinin kuvvet kümesi, A nın bütün alt kümelerinin ailesidir. Bunu $\mathscr{P}(A)$ simgesiyle temsil edeceğiz; yani

$$\mathscr{P}(A) = \{Y \mid Y \subset A\} \tag{7.9}$$

dır.

`Teorem` 5.3.1 gereğince boş küme A nın bir alt kümesidir ; yani $\emptyset \subset A$ dır. Ohalde $\emptyset \in \mathscr{P}(A)$ dır. Örneğin, $A = \{a, b\}$ kümesinin kuvvet kümesi

$$\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

dir.

7.1.5 Alt Aile

Bir $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ ailesi verilsin. Eğer $J \subset I$ ise

$$\mathscr{B} = \{A_j \,|j \in J\} \tag{7.10}$$

ailesine, $\mathscr{P}(A)$ nın bir alt ailesi, denilir ve $\mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A)$ simgesiyle gösterilir.

7.1.6 Bir Kümenin Ayrışımı

Tanım 7.1.1. Boş olmayan bir A kümesi verilsin. Aşağıdaki özeliklere sahip bir $\mathscr{A}$ ailesine A kümesinin bir *ayrışımı* denilir:

(i) $\mathscr{A}$ ya ait kümeler A nın alt kümesidirler.

(ii) Boş küme $\mathscr{A}$ ailesine ait değildir.

(iii) $\mathscr{A}$ ailesi ayrıktır.

(iv) $\mathscr{A}$ ailesinin bileşimi A kümesine eşittir

Bunu simgelerle açıklamak istersek şöyle diyebiliriz: Aşağıdaki özeliklere sahip $\mathscr{A}$ ailesine A kümesinin bir *ayrışımıdır*, denilir:

(i) $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(A)$

(ii) $\emptyset \notin \mathscr{A}$

(iii) $(\alpha, \beta \in I) \wedge (\alpha \neq \beta) \Rightarrow A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$

(iv) $A = \cup\mathscr{A}$

Buradan hemen anlaşıldığı üzere $\mathscr{A}$ ailesi A kümesinin bir ayrışımı ise, A nın her öğesi, $\mathscr{A}$ ya ait bir ve yalnızca bir küme tarafından içerilir.

7.1.7 Bir Kümenin Örtüsü

Bir A kümesi ile bir $\mathscr{B} = \{B_i \mid i \in I\}$ ailesi verilsin. Eğer

$$A \subset \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B = \bigcup_{i \in I} B_i \tag{7.11}$$

oluyorsa, verilen aileye A kümesinin bir *örtüsüdür*, denilir.

Teorem 7.1.1. *Bir boş ailenin arakesiti evrensel kümeye, bileşimi ise boş kümeye eşittir.*

İSPAT:

Bir $\mathscr{A}$ ailesinin boş bir aile olması demek, $\mathscr{A}$ ailesine ait hiçbir küme yok demektir. Başka bir deyişle

$$\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in \emptyset\} \tag{7.12}$$

ailesi boş bir ailedir.

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = E \tag{7.13}$$

$$\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset \tag{7.14}$$

olduğunu göstereceğiz. (7.7) ve (7.5) gereğince

(i) $y \in \bigcap_{i \in \emptyset} A_i \Leftrightarrow \forall \alpha (\alpha \in \emptyset) \Rightarrow (y \in A_\alpha)$

(ii) $y \in \bigcup_{i \in \emptyset} A_i \Leftrightarrow \exists \beta (\beta \in \emptyset) \wedge (y \in A_\beta)$

olduğunu biliyoruz. Şimdi sağ yandaki önermeleri ayrı ayrı inceleyelim, Birincide $\alpha \in \emptyset$ önermesi yanlış olduğundan, (2.4) kuralları gereğince, evrensel kümeye ait her y öğesi için $(\alpha \in \emptyset) \Rightarrow (y \in A_\alpha)$ önermesi her zaman doğrudur (totoloji, çelişmez). O halde (7.13) sağlanır.

İkincide $(\beta \in \emptyset)$ yanlış bir önerme olduğundan, gene (2.1) kuralları gereğince, evrensel kümeye ait her y öğesi için $(\beta \in \emptyset) \wedge (y \in A_\alpha)$ önermesi her zaman yanlıştır (olmazlık, çelişki). Demek ki bileşime ait hiç bir öğe yoktur. O halde (7.14) sağlanır.

Önerme 7.1.1 (Genelleşmig de Morgan Kuralı). *Bir*

$$\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$$

ailesi için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)' = \bigcap_{i \in I} A_i' \tag{7.15}$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' = \bigcup_{i \in I} A_i' \tag{7.16}$$

İSPAT: **(7.15):**

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' &\Leftrightarrow x \notin \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \\
&\Leftrightarrow \neg\{\exists\alpha(\alpha \in I) \wedge (x \in A_\alpha)\} \\
&\Leftrightarrow \{\forall\alpha(\alpha \in I) \Rightarrow (x \notin A_\alpha)\} \\
&\Leftrightarrow \{\forall\alpha(\alpha \in I) \Rightarrow (x \in A'_\alpha)\} \\
&\Leftrightarrow x \in \left(\bigcup_{i\in I} A'_i\right)
\end{aligned}$$

İSPAT: **(7.16):** Yukarıdakine benzer yolla yapılabilen bu ispat öğrenciye bir alıştırma olarak bırakılmıştır.

Önerme 7.1.2 (Genelleşmig Dağılma Kuralı)**.** *$\mathscr{A} = \{A_i \,|\, i \in I\}$ ve $\mathscr{B} = \{B_j \,|\, j \in J\}$ aileleri için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) &= \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}(A_i \cap B_j)\right) && (7.17)\\
&= \bigcup_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_j)\right) \\
\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) &= \bigcap_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}(A_i \cup B_j)\right) && (7.18)\\
&= \bigcap_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_j)\right)
\end{aligned}$$

İSPAT: **(7.17):**

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) &\Leftrightarrow x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \wedge x \in \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \\
&\Leftrightarrow \exists\alpha((\alpha \in I) \wedge (x \in A_\alpha)) \wedge \exists\beta((\beta \in J) \wedge (x \in B_\beta)) \\
&\Leftrightarrow \exists\alpha((\alpha \in I) \wedge \exists\beta(\beta \in J)) \wedge (x \in A_\alpha \cap B_\beta) \\
&\Leftrightarrow \exists\alpha((\alpha \in I) \wedge \left(x \in \bigcup_{j\in J}(A_i \cap B_j)\right) \\
&\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}((A_i \cap B_j)\right)
\end{aligned}$$

İSPAT: **(7.17):** bu ispat da yukarıdakine benzer düşünüşle yapılabilir.

7.2 PROBLEMLER

1. $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ ve $\mathscr{B} = \{B_i \mid i \in I\}$ aileleri verilsin. Eğer her $i \in I$ için $A_i \subset B_i$ ise aşağıdaki bağıntıların varlığını gösteriniz.
$$\bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{i\in I} B_i \qquad \bigcap_{i\in I} A_i \subset \bigcap_{i\in I} B_i$$

2. Bir $\{A_i \mid i \in I\}$ ailesi verilsin. Eğer $J \subset I$ ise aşağıdaki bağıntının varlığını gösteriniz.
$$\bigcup_{j\in J} A_j \subset \bigcup_{i\in I} A_i$$

3. Bir $\{A_i \mid i \in I\}$ ailesi ile bir B kümesi verilsin. Her $i \in I$ için $A_i \subset B$ ise aşağıdaki bağıntının varlığını gösteriniz.
$$\bigcup_{i\in I} A_i \subset B$$

4. $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ ve $\mathscr{B} = \{B_i \mid i \in I\}$ aileleri verilsin. Aşağıdaki bağıntının varlığını gösteriniz.
$$\bigcup_{i\in I}(A_i \cup B_i) = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$$

5. Bir $\{B_i \mid i \in I\}$ ailesi ile bir A kümesi veriliyor. Aşağıdaki bağıntının varlığını gösteriniz.
$$A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$$

6. $\{A_i \mid i \in I\}$ ile $\{B_i \mid i \in I\}$ aileleri verilsin. Aşağıdaki bağıntıların varlığını gösteriniz.
$$\left(\bigcup_{i\in I}(A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}(A_i \setminus B_j)\right)$$
$$\left(\bigcap_{i\in I}(A_i\right) \setminus \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}(A_i \setminus B_j)\right)$$

7. Bir A kümesi ile bunun $mathscrA$ ve $\mathscr{B}$ gibi farklı iki örtüsü verilmiş olsun. Bu iki örtünün arakesitinin de bir örtü olduğunu gösteriniz.

7.3 KÜME DİZİLERİ

Tanım 7.3.1. Her n doğal sayısına karşılık bir A_n kümesi verilmiş olsun. Böylece

$$\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$$

gibi bir kümeler ailesi elde edilir. Bu aileye bir *kümeler dizisi* diyeceğiz. Başka bir deyişle, bir $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ ailesinin I indis kümesi

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

doğal sayılar kümesine eşitse, $\mathscr{A}$ ya bir *kümeler dizisi*, denilir.

Tanım 7.3.2. Bir $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kümeler dizisi verilsin. Bu dizinin üst ve alt limitlerini, sırasıyla,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n+k} \tag{7.19}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_{n+k} \tag{7.20}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right) \tag{7.21}$$

diye tanımlanır.

Eğer üst ve alt limitleri eşitse, bu kümeler dizisinin *limiti vardır*, diyecek ve bu limiti,

$$\lim_{n\to\infty} A_n \tag{7.22}$$

simgesiyle göstereceğiz.

Önerme 7.3.1. *$\{A_n\}$ ve $\{B_n\}$ herhangi iki kümeler dizisi ise aşağıdaki bağıntı sağlanır:*

$$\limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \subset (\limsup_{n\to\infty} A_n) \cap (\limsup_{n\to\infty} B_n) \tag{7.23}$$

İSPAT:

$$
\begin{aligned}
x \in \limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) &\Longrightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_{n+k} \cap B_{n+k}) \\
&\Longrightarrow n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_{n+k} \cap B_{n+k}) \\
&\Longrightarrow n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\,(x \in A_{n+k} \cap B_{n+k})) \\
&\Longrightarrow n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\,(x \in A_{n+k}) \wedge (x \in B_{n+k}) \\
&\Longrightarrow n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\,(x \in A_{n+k}) \wedge (\exists k \in \mathbb{N})\,(x \in B_{n+k}) \\
&\Longrightarrow n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n+k}) \wedge (x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{n+k})) \\
&\Longrightarrow n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n+k}) \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{n+k}) \\
&\Longrightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n+k} \wedge x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{n+k}) \\
&\Longrightarrow (x \in \limsup_{n\to\infty} A_n) \wedge (x \in \limsup_{n\to\infty} B_n) \\
&\Longrightarrow (x \in \limsup_{n\to\infty} A_n) \cap (\limsup_{n\to\infty} B_n))
\end{aligned}
$$

Önerme 7.3.2.

$$
\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n \tag{7.24}
$$

dir.

İSPAT:

$$
\begin{aligned}
x \in \limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_{n+k} \cup B_{n+k}) \\
&\Longleftrightarrow n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_{n+k} \cup B_{n+k}) \\
&\Longleftrightarrow n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\,(x \in A_{n+k} \cup B_{n+k})) \\
&\Longleftrightarrow n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\,(x \in A_{n+k}) \vee (x \in B_{n+k}) \\
&\Longleftrightarrow n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\,(x \in A_{n+k}) \vee (\exists k \in \mathbb{N})\,(x \in B_{n+k}) \\
&\Longleftrightarrow n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n+k}) \vee (x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{n+k})) \\
&\Longleftrightarrow n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n+k}) \vee n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{n+k}) \\
&\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n+k} \vee x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{n+k}) \\
&\Longleftrightarrow (x \in \limsup_{n\to\infty} A_n) \vee (x \in \limsup_{n\to\infty} B_n) \\
&\Longleftrightarrow (x \in \limsup_{n\to\infty} A_n) \cup (\limsup_{n\to\infty} B_n))
\end{aligned}
$$

Önerme 7.3.3. *Her kümeler dizisinden aynı bileşime sahip ayrık bir dizi türetilebilir.*

İSPAT: $\mathscr{A} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ herhangi bir kümeler dizisi olsun.

$$\begin{aligned}
&B_0 = A_0\\
&B_1 = A_1 - B_0\\
&B_2 = A_2 - (B_0 \cup B_1) = A_2 - B_1\\
&B_3 = A_3 - (B_0 \cup B_1 \cup B_2) = A_3 - B_2\\
&B_4 = A_4 - (B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3) = A_4 - B_3\\
&\quad\vdots\\
&B_n = A_n - (B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_{n-1}) = A_n - B_{n-1}\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

biçiminde yinelgen olarak tanımlanan

$$\mathscr{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\} \tag{7.25}$$

kümeler dizisini düşünelim. Göstereceğiz ki, $\mathscr{B}$ dizisi aşağıdaki iki özeliğe sahiptir.

(a) $\mathscr{B}$ ailesi ayrık kümelerden oluşur.

(b) $\mathscr{B}$ ailesinin bileşimi $\mathscr{A}$ ailesinin bileşimine eşittir.

(a) nın kanıtı: $n \neq m$ olduğunda $B_n \cap B_m = \emptyset$ olduğunu göstermeliyiz. $n > m$ olduğunu varsayalım.

$$\begin{aligned}
x \in B_m &\Rightarrow x \in A_m \wedge x \notin \bigcup_{k=1}^{m-1} A_k\\
&\Rightarrow x \in A_m \Rightarrow x \notin A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\\
&\Rightarrow x \notin B_n
\end{aligned}$$

olacaktır. O halde $\mathscr{B}$ ailesi ayrıktır.

(b) nin kanıtı:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n &\Rightarrow \exists n(n \in \mathbb{N} \wedge x \in A_n) \\ &\Rightarrow \exists n(n \in \mathbb{N}) \wedge (x \in \bigcup_{m=1}^{n} B_m) \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_m \end{aligned}$$

den istenen gey görülür.

7.4 PROBLEMLER

1.
$$\begin{aligned} X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots \\ Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \ldots \supset Y_n \supset \ldots \end{aligned}$$

   olacak şekilde $\{X_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ve $\{Y_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ küme dizileri (aileleri) veriliyor.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(X_n \cup Y_n) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n\right)$$

   olduğunu gösteriniz.

2. $\{A_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ bir kümeler dizisi ise

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset (\liminf_{n\to\infty} A_n) \subset (\limsup_{n\to\infty} A_n)$$

   olduğunu gösteriniz.

3. $x \in (\liminf_{n\to\infty} A_n)$ olması için gerekli ve yeterli koşul, x öğesinin sonlu sayıdaki A_n kümeleri hariç, geriye kalan bütün A_n kümelerine ait olmasıdır. Gösteriniz.

4. $x \in (\limsup_{n\to\infty} A_n)$ olması için gerekli ve yeterli koşul, x öğesinin sonsuz çoklukta A_n kümelerine ait olmasıdır. Gösteriniz.

5. (X, d) bir metrik uzay ve $F \subset X$ kapalı bir alt küme olmak üzere

$$A_n = \left\{x \,|\, d(F, x) < \frac{1}{n}\right\}, (n = 1, 2, 3, \ldots$$

   tanımlanıyor.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = F \tag{7.26}$$

   olduğunu gösteriniz.