Bölüm 6

BAĞINTILAR

Matematikte Yeni Ufuklar

Cebirsel yöntemlerin kolaylığı yanında, geometride ölçümlerin sayısallaştırılması gereğini gören ünlü Fransız matematikçisi *René Descartes (1596-1650)* yeni bir yöntem geliştirdi. Düzlemdeki noktaların yerlerini belirtmek için, birisi yatay konumda, ötekisi düşey konumda olan ve birbirlerini başlangıç noktalarında dik kesen iki sayı doğrusu aldı. Bu doğrulara *koordinat eksenleri* adını verdi. Düzlemdeki bir A noktasından yatay doğruya inilen dikmenin ayağı x sayısına; düşey doğruya inilen dikmenin ayağı y sayısına karşılık geliyorsa, $\{x, y\}$ sayı çiftinin A noktasının düzlemdeki konumunu kesinkes belirttiği görüldü. Ancak, bu sayıların rolleri değiştiğinde, farklı bir noktanın konumunu belirteceği açıktır. Buradan doğacak karışıklığı yoketmek için, hangisinin yatay eksen üzerinde, hangisinin düşey eksen üzerinde olduğunu belirtecek, bir sıralama kavramı konuldu ve $\{x, y\}$ yerine (x, y) simgesi kullanıldı. Bunlara A noktasının *bileşenleri (koordinatları)* adı verildi. (x, y) gösteriminde birinci öğe olan x sayısı, yatay eksen üzerindeki bileşen (apsis); ikinci öğe olan y sayısı, düşey eksen üzerindeki bileşen (ordinat) olarak adlandırıldı. Böylece, $\{x, y\}$ yerine (x, y) simgesi kullanılmakla, sayı çiftine bir sıralanmış olma niteliği eklendi. Bu nedenle, (x, y) simgesinin temsil ettiği yeni varlığa sıralanmış sayı çifti denilir.

Düzlemdeki noktaların sıralanmış sayı çiftleriyle belirtilmesinden sonra, düzlemsel geometrinin temel kavramları cebirsel yöntemlerle ifade edilebilir hale gelmiştir. Tabii, bu yöntem, (x, y, z) gibi sıralı üçlüler yardımıyla uzay geometriye kolayca uygulanmıştır. Sonra, n bir doğal sayı olmak üzere, $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ gibi sıralı n liler tanımlandı ve n boyutlu uzaylar incelendi.

Giderek, bu kavram, matematikte ve başka bilim dallarında geniş bir uygulama alanı buldu. Bu günkü teknik ve teknoloji, büyük ölçüde bu kavrama dayanır. [15]

6.1 KARTEZYEN ÇARPIM

Bu bölümde, soyut kümeler için, sıralanmış çiftleri inceleyecek ve bir uygulaması olarak analitik düzlemi tanımlayacağız.

Tanım: *A, B iki küme olsun. $a \in A$ ile $b \in B$ herhangi iki öğe ise, (a, b) nesnesine, bir* sıralı ikili, *denilir.*

(a, b) nesnesi, yeni bir varlıktır. a öğesine, (a, b) sıralı ikilisinin *birinci bileşeni*, b öğesine *ikinci bileşeni*, denilir. Bu sıralama, belirleyicidir. Dolayısıyla, aşağıdaki önermeyi, sıralı ikililerin eksiksiz bir tanımı olarak alabiliriz.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d) \tag{1}$$

(a, b) sıralı ikilisine, *sıralı çift* ya da, kısaca, *ikili* de denilir.

Uyarı: Bir sıralı ikilide yazılış sırası belirleyici özelik taşır; bileşenlerin sırası değiştirilirse başka bir ikili elde edilir.

Örnek

$$(2, 7) \neq (7, 2)$$

Kartezyen Çarpım

Tanım: *Hiç birisi boş olmayan A ile B kümelerinin kartezyen çarpımı*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\} \tag{2}$$

kümesidir.

Kartezyen terimi, onu ilk ortaya koyan R.Descartes'dan gelir. Sayılardaki çarpma işlemiyle hiç bir ilişkisi yoktur. O, yalnızca, sıralı ikililerden oluşan bir kümedir.

Örnek

$A = \{a, b, c\} \quad B = \{x, y\}$ kümeleri için,

$A \times B$ ve $B \times A$ kartezyen çarpımlarını bulunuz.

Çözüm:

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$$

ve

$$B \times A = \{(x, a), (x, b), (x, c), (y, a), (y, b), (y, c)\}$$

olur.

Önerme: *Hiç birisi boş olmayan A ile B kümeleri eşit değilseler,*

$$A \times B \neq B \times A$$

dır; yani, kartezyen çarpımın yer değiştirme özeliği yoktur.

Bunu, (1) bağıntısından hemen görebiliriz. Ayrıca, bu özelik, yukarıdaki örnek üzerinde de doğrulanabilir.

Önerme: *Bir kartezyen çarpımın nicelik sayısı, kümelerin nicelik sayılarının çarpımına eşittir.*

$$n(A \times B) = n(A).n(B)$$

Örneğin, yukarıdaki örnek için,

$$n(A) = 3, n(B) = 2, n(A \times B) = n(B \times A) = 6$$

dır. Buradan,

$$n(A).n(B) = 3.2 = 6 \quad \text{ve} \quad n(B).n(A) = 2.3 = 6$$

çıkar.

6.1.1 Kartezyen Çarpımların Gösterimi

Bazı durumlarda, kartezyen çarpımları bir şekille göstermek algılamayı kolaylaştırabilir. Bunun için iki yöntem kullanacağız: *Ok Diyagramı ve Grafik.*

Ok Diyagramı

$A \times B$ kartezyen çarpımını göstermek için A ile B kümelerinin Venn diyagramları yan yana çizilir. Her $(a, b) \in A \times B$ için, a öğesini b öğesine eşleyen bir ok çizilir. Ortaya çıkan şekil, $A \times B$ nin *ok diyagramı'* dır.

Grafik

GRAFIK (KOORDINAT DIYAGRAMI)

Birisi yatay konumda olan ve birbirlerini dik kesen iki doğru çizilir. A kümesinin ögeleri yatay bir doğru üzerine, B kümesinin ögeleri düşey bir doğru üzerine yerleştirilir.

Her $(a, b) \in A \times B$ için, a ve b den doğrulara çıkılan dikmelerin kesim noktası, (a, b) sıralı çiftine eşlenir. Bu yolla düzlem üzerinde elde edilen bütün noktaların oluşturduğu küme, $A \times B$ kartezyen çarpımının grafiğidir.

Örnekler

1. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{3, 4\}$ kümeleri veriliyor. $A \times B$ ile $B \times A$ nin grafiklerini çiziniz.

B			
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)
	1	2	3

$A \times B$ nin Grafiği

A		
3	(3,3)	(4,3)
2	(3,2)	(4,3)
1	(3,1)	(4,1)
	3	4

$B \times A$ nın Grafiği

Yukarıdaki grafiklerden, $A \times B \neq B \times A$ olduğunu görüyoruz.

2. Özel olarak, bir A kümesinin kendisiyle kartezyen çarpımı da düşünülebilir. $A = \{2, 7, 8\}$ için $A \times A$ kartezyen çarpının öğelerini listeleyiniz, nicelik sayısını bulunuz ve grafiğini çiziniz.

   Çözüm:
   $$A \times A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$$
   kümesinin öğelerini listelersek,
   $$A \times A = \{(2, 2), (2, 7), (2, 8), (7, 2), (7, 7), (7, 8)(8, 2), (8, 7), (8, 8)\}$$
   olur.

   Nicelik sayısına gelince, yukarıdaki listede olan sıralı ikilileri sayarsak,
   $$n(A) = 3, n(A \times A) = 9$$
   olduğunu görebiliriz. Aynı sonucu, formülden de çıkarabiliriz.
   $$n(A \times A) = n(A).n(A) = 3.3 = 9$$
   Kartezyen çarpımın grafiği aşağıda verilmiştir.

A				
8	(2,8)	(7,8)	(8,8)	
7	(2,7)	(7,7)	(8,7)	
2	(2,2)	(7,2)	(8,2)	
	2	7	8	A

Tanım: *$A \times A$ kartezyen çarpımının köşegeni,*
$$\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$$
alt kümesidir.

Yukarıdaki örnek için, $A \times A$ nin köşegeni,
$$\Delta = \{(2, 2), (7, 7)(8, 8)\}$$
olur.

Kartezyen Çarpımın Özelikleri

$\times$ işleminin $\cup$ üzerine Dağılması:
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$\times$ işleminin $\cap$ üzerine Dağılması:
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

6.2 ANALİTİK DÜZLEM

Tanım: Birbirlerini başlangıç noktalarında dik kesen iki sayı doğrusuna, bir *Dik Koordinat Sistemi,* denir.

Üzerinde bir koordinat sistemi olan düzleme *Analitik Düzlem,* denir.

Teorem: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *kartezyen çarpımı ile analitik düzlem bire bir eşlenebilir.*

Birim uzunlukları eşit olan iki sayı doğrusu Ox ve Oy olsun. Bu eksenler, başlangıç noktalarında birbirlerine dik olacak biçimde düzleme yerleştirilir. Görüntüyü kolay algılamak için, Ox ekseni yatay konuma getirilir. Tabii, Oy ekseni düşey konumda olacaktır.

Bir $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sıralı çifti verilsin. Ox ekseni üzerinde, x_0 sayısına karşılık gelen noktadan Ox eksenine bir dikme çizilir. Aynı şekilde, Oy ekseni üzerinde, y_0 sayısına karşılık gelen noktadan Oy eksenine bir dikme çizilir. Bu iki dikmenin kesiştiği P noktası, (x_0, y_0) ikilisine eşlenir. Bu eşlemede, her $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sıralı çiftine düzlemde bir tek P noktası karşılık gelir.

Tersine olarak, düzlemdeki bir P noktasından Ox ve Oy eksenlerine indirilen dikmelerin ayaklarının karşılık geldiği sayılar x_0 ve y_0 ise, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ikilisini P noktasına eşleyelim. Bu eşlemede, düzlemdeki her P noktasına bir tek $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ikilisi karşılık gelir.

O halde, analitik düzlem ile $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kartezyen çarpımı arasında bire bir ve örten (bbö) bir eşleme kurulmuş oldu.

Bir koordinat sisteminde,

- *Ox eksenine* yatay eksen (apsisler ekseni),
- *Oy eksenine* düşey eksen (ordinatlar ekseni),
- *Yukarıdaki eşlemeye göre, (x_0, y_0) sıralı sayı çiftine, P noktasının* bileşenleri (koordinatları),
- *Eksenlerin kesişim noktasına* başlangıç noktası (orijin),
- *x_0 sayısına P noktasının* yatay bileşeni (apsisi),
- *y_0 sayısına P noktasının* düşey bileşeni (ordinatı),

denilir.

P noktasının bileşenlerini belirtmek gerektiği zaman $P(x_0, y_0)$ ya da $P = (x_0, y_0)$ yazarız. Başlangıç noktasını O ile göstereceğiz; bileşenleriyle gösterirsek, $O(0, 0)$ olacaktır.

Örnekler

1. $A(3, 2)$, $B(3, 3)$, $C(-1, 2)$, $D(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$, $E(2, -\frac{7}{2})$ noktalarını analitik düzlemdeki konumlarına yerleştiriniz. Bunlar arasında, köşegen üzerinde olan öğe var mıdır?

Çözüm: Verilen noktaların analitik düzlemdeki konumlarını gösteren bir grafik çiziniz. Köşegen üzerinde olan öğelerin yatay ve düşey bileşenleri birbirlerine eşit olacağına göre, köşegen aşağıdaki kümedir.

$$\Delta = B(3,3),\ D(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$$

2. Aşağıdaki kümeleri analitik düzlemde gösteriniz.
   a. $E = \{x|x \in \mathbb{R}, 1 \leq y < 2\}$,
   b. $F = \{(x,y)|2 \leq x < 4 \wedge y \in \mathbb{R}\}$,
   c. $E \times F$

   Çözüm: E kümesi yatay bir şerit, F kümesi düşey bir şerit ve $E \times F$ kümesi ise köşeleri $(2,1), (4,1), (4,2), (1,2)$ olan bir dikdörtgensel bölgedir. Alt ve sol yandaki kenarlar bölgeye dahildir; üst ve sağ yandaki kenarlar dahil değildir.

3. Hiç biri boş olmayan A, B ve C kümeleri için, $A \times B \times C$ kartezyen çarpımı,

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$

   olarak tanımlanır.

4. Ox, Oy, Oz başlangıç noktalarında birbirlerine dik olan üç sayı ekseni, üç boyutlu gerçel Öklit uzayına eştir. Bunun analitik temsili,

   $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kartezyen çarpımıdır:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

6.2.1 Uygulamalar

1. $(x + 2y - 3, 3x - y - 2) = (6, -10))$ ise, $P(x,y)$ noktasının analitik düzlemdeki konumunu şema ile gösteriniz.

2. $(x-y, 9) = (1, x+y)$ ise, $Q(x,y)$ noktasının analitik düzlemdeki konumunu şema ile gösteriniz.

3. $(2u + 1, v - 3, 4 - w) = (u + 3, 5 - v, 2 + w)$ ise (x,y,z) sıralı üçlüsünü bulunuz.

4. $A = \{-1, -2, 0, 2\}$, $B = \{-3, 0, 2, 3\}$ kümeleri için, $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini yazınız; şemalarını çiziniz. Nicelik sayılarını bulunuz.

5. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{1,3\}$ kümeleri için, $(A \cap B) \times (B \setminus C)$ kartezyen çarpımının öğelerini listeleyiniz; şemasını çiziniz.

6. Herhangi bir kümenin boş küme ile kartezyen çarpımının boş olduğunu gösteriniz:

$$A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$$

7. Herhangi bir kümenin boş küme ile kartezyen çarpımının nicelik sayısının 0 olduğunu gösteriniz:

$$n(A \times \emptyset) = n(\emptyset) = 0 = n(\emptyset \times A)$$

8. $A = \{-1, -2, 1\}, B = \{-2, 0, 2\}, C = \{-3, -1, 2\}$ kümeleri için, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ ve $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$ eşitliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

9. $A \times B = \{(x, m), (x, n), (y, m), (y, n), (z, m), (z, n)\}$ kümesi veriliyor. A ve B kümelerini yazınız.

10. $E \times E$ kartezyen çarpımını, kısaca, E^2 ile gösteriyoruz.

$$E^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

kümesini şema ile gösteriniz. Köşegenini, nicelik sayısını ve E kümesini bulunuz.

11. A, B ve C herhangi üç küme olduğuna göre;

$$\begin{aligned}
A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\
A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) \\
A \times (B \setminus C) &= (A \times B) \setminus (A \times C) \\
(A \times B) \cup (C \times D) &= (A \cup C) \times (B \cup D) \\
(A \times B) \cap (C \times D) &= (A \cap C) \times (B \cap D) \\
(A \times B) \setminus (C \times C) &= [(A \setminus C) \times B] \cup [A \times (B \setminus C)]
\end{aligned}$$

eşitliklerinin varlığını gösteriniz.

12. Analitik düzlemde,

a. Ox ekseninin, düşey bileşeni 0 olan noktaların kümesi olduğunu; yani,

$$Ox = \{\, (x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

olduğunu,

b. Oy ekseninin, yatay bileşeni 0 olan noktaların kümesi olduğunu; yani,

$$Oy = \{\, (0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

olduğunu gösteriniz; nedenini açıklayınız.

13. Bileşim işleminin $\times$ işlemi üzerine dağılmadığını; yani,

$$A \cup (B \times C) \neq (A \cup B) \times (A \cup C)$$

olduğunu bir örnek üzerinde gösteriniz.

14. A, B, C ve D herhangi dört küme olduğuna göre;

$$A \times A = B \times B \Rightarrow A = B$$
$$B \subset C \Rightarrow (A \times B) \subset (A \times C)$$
$$(A \subset C) \wedge (B \subset D) \Rightarrow (A \times B) \subset (C \times D)$$
$$(A \times B) \subset (A \times C) \wedge A \neq \emptyset) \Rightarrow B \subset C$$
$$(A \times B) = (C \times D) \Rightarrow (A = C) \vee (B = D)$$
$$(A \times B) = \emptyset \Rightarrow [(A = \emptyset) \vee (B = \emptyset]$$

bağıntılarının varlığını gösteriniz.

15. Köşeleri $A(3,4), O(0,0), C(6,0)$ olan $\triangle AOC$ üçgenini analitik düzlemde çiziniz. $[AH]$ yükseliğinin H ayağının koordinatlarını ve üçgenin alanını bulunuz.

16. Köşeleri $A(-3,1), B(3,1), C(5,5), D(1,5)$ olan $ABCD$ dörtgenini çiziniz. Dörtgenin türünü söyleyiniz ve alanını bulunuz.

17. $A = \{-1,2,3\}, B = \{-2,3\}$ için $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini analitik düzlemde Venn şeması ile gösteriniz.

6.3 BAĞINTILAR

Tanım: *Bir kartezyen çarpımın her alt kümesi bir bağıntıdır.*

Hiçbirisi boş olmayan A ve B kümeleri verilsin. $A \times B$ nin her β alt kümesine, A dan B ye bir *ikili bağıntı* ya da, kısaca, *bağıntı* denilir.

$\beta \subset A \times B$ ise;

β, A dan B ye bir bağıntıdır,
β, A üzerinde tanımlı bir bağıntıdır,
$(x,y) \in \beta$ ise, β , x öğesini y öğesine bağlar,
$(x,y) \in \beta$ ise, β , x öğesini y öğesine eşler,
$(x,y) \in \beta \Leftrightarrow x\beta y$,

denilir.

Örnekler

1. Bir okuldaki her öğrenciye bir numara verilir. *(öğrenci, numara)* sıralı çiftleri, *öğrenciler kümesi*'nden *numaralar* kümesine tanımlı bir bağıntıdır.

2. *(ad,soyad)* sıralı çiftleri, *adlar* kümesinden *soyadlar* kümesine tanımlı bir bağıntıdır.

3. $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesi üzerinde

$$\beta = \{(x,y) \mid x,y \in A \ \wedge \ x \text{ sayısı } y \text{ yi tam böler}\}$$

bağıntısını tanımlayalım.

$$\beta = \{(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(3,3),(3,6),(3,9),(4,8)\}$$

dir.

6.3.1 Bağıntıların Gösterimi

Kartezyen çarpımda olduğu gibi, bazan, bağıntıyı bir şekille göstermek algılamayı kolaylaştırabilir. Bunun için, kartezyen çarpımlarda yaptığımız gibi, iki yöntem kullanacağız: *Ok Diyagramı ve grafik.*

$\beta \subset A \times B$ bağıntısı verilsin.

Ok Diyagramı

β nın ok diyaramını elde etmek için, $A \times B$ nin ok diyagramından, β ya ait olanlar seçilirse istenen diyagram elde edilir.

Bunu doğrudan elde etmek için, A ile B kümelerinin Venn diyagramları yan yana çizilir. Her $(a,b) \in \beta$ için, a öğesini b öğesine eşleyen bir ok çizilir.

Grafik

Grafik (Koordinat Diyagrami)

$A \times B$ nin grafiğinden, β ya ait olanlar seçilirse, β nın grafiği ortaya çıkar.

Bunu doğrudan elde etmek için, birisi yatay konumda olan ve birbirlerini dik kesen iki doğru çizilir. A kümesinin ögeleri yatay bir doğru üzerine, B kümesinin ögeleri düşey bir doğru üzerine yerleştirilir.

Her $(a,b) \in \beta$ için, a ve b den doğrulara çıkılan dikmelerin kesim noktası, (a,b) sıralı çiftine eşlenir. Elde edilen noktaların oluşturduğu küme, istenen grafiktir.

β bağıntısının grafiğini $graf(\beta)$ simgesiyle göstereceğiz.

Bir β bağıntısı verilmişse, $graf(\beta)$ kesinkes belirlidir. Karşıt olarak, $graf(\beta)$ verilmişse, β bağıntısı kesinlikle belirli olur. Bu nedenle, yerine göre her ikisini eş anlamda kullanabiliriz.

$\beta \subset A \times B$ bağıntısı verildiğinde, A kümesine β nın *tanım bölgesi*; B kümesine ise β nın *değer bölgesi* denilir.

6.3.2 Ters Bağıntı

$\beta \subset A \times B$ bağıntısı verilsin.

$$\beta^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in \beta\} \tag{5}$$

bağıntısına, β nın *ters bağıntısı* denilir.

$$\beta \subset A \times B \Leftrightarrow \beta^{-1} \subset B \times A \tag{5}$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla, β^{-1} bağıntısı B kümesinden A kümesine tanımlıdır ve

$$\left(\beta^{-1}\right)^{-1} = \beta$$

dır.

6.3.3 Uygulamalar

1. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesi veriliyor.

   a) A da tanımlı öyle bir bağıntı yazınız ki $\beta_1 = \beta_1^{-1}$ olsun.

   b) A da tanımlı $\beta_2 = \{(x,y) : x \mid y \text{ ve } x \neq y\}$ bağıntısı veriliyor. β_2 ve β_2^{-1} bağıntılarını liste yöntemi ile yazalım. ($x \mid y$ simgesi, "*x sayısı y sayısını böler*" anlamındadır.)

   c) β_2 ile β_2^{-1} in ok ve koordinat grafiklerini çizerek karşılaştırınız.

   Çözüm

   a) $\beta_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ bağıntısında $\beta_1 = \beta_1^{-1}$ olduğunu görünüz. Bu özelikte iki bağıntı daha yazınız.

   b) $\beta_2 = \{(x,y) : x \mid y \text{ ve } x \neq y\}$ için,

$$\beta_2 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,6),(3,6)\}$$

$$\beta_2^{-1} = \{(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(4,2),(6,2),(6,3)\}$$

   olur.

   c)

   $\beta_1, A \times B$ şemasının köşegeni üzerindeki elemanların kümesidir. β_2 ile β_2^{-1} bağıntılarının elemanları ise şemanın köşegenine göre simetriktirler. $(1,6) \in \beta_2$ ve $(6,1) \in \beta_2^{-1}$ elemanlarının simetrik olduklarına dikkat ediniz.

   Aşağıdaki β_2 ile β_2^{-1} bağıntılarının ok diyagramlarını inceleyiniz.

   A kümesinden A ya tanımlı bir β bağıntısı ile β^{-1} ters bağıntısının grafikleri, $A \times A$ nın köşegenine göre simetriktir. Ayrıca β ile β^{-1} in yaptığı eşlemeler birbirinin tersidir.

6.4 BAĞINTI TÜRLERİ

Tanım: *$\beta \subset A \times A$ ve $x, y, z \in A$ olsun. Aşağıdaki özelikler, karşılarında yazılı bağıntı türünü tanımlar.*

1.	$[\forall x(x \in A)$	$\Rightarrow$	$(x,x) \in \beta]$	*(yansımalı)*
2.	$[\forall x(x \in A)$	$\Rightarrow$	$(x,x) \notin \beta]$	*(yansımaz)*
3.	$[(x,y) \in \beta)$	$\Rightarrow$	$(y,x) \in \beta]$	*(simetrik)*
4.	$[(x,y) \in \beta)$	$\Rightarrow$	$(y,x) \notin \beta]$	*(simetrisiz)*
5.	$[(x,y) \in \beta) \wedge (y,x) \in \beta$	$\Rightarrow$	$(x = y)]$	*(Antisimetrik)*
6.	$[(x,y) \in \beta) \wedge (y,z) \in \beta$	$\Rightarrow$	$(x,z) \in \beta]$	*(geçişken)*
7.	$(x, y \in A)$	$\Rightarrow$	$[(x,y) \in \beta \ \vee \ (y,x) \in \beta]$	*(Örgün)*

Bir bağıntının yansımalı olması için gerekli ve yeterli koşul köşegenini kapsamasıdır: $\Delta \subset \beta$

Örnek

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde tanımlı,

$$\alpha = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$$

bağıntısı yansımalıdır. α bağıntısının, $A \times A$ nın köşegenini kapsadığına dikkat ediniz.

Örnek

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde tanımlı,

$$\beta = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$$

bağıntısı yansımalı değildir; çünkü $(2, 2) \notin \beta$ dır.

Hiç Yansımaz bağıntı, köşegene ait hiç bir noktayı içermez:

$$\Delta \cap \beta = \emptyset$$

Dolayısıyla,

$$\textit{Hiç Yansımaz} \not\equiv \neg(\textit{Yansımalı}) \equiv (\textit{Yansımalı Değil})$$

dır; çünkü, *yansımalı değil* bağıntısı, köşegene ait bazı noktaları içerebilir.

Örnek

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde tanımlı,

$$\gamma = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 2), (4, 1), (1, 4)\}$$

bağıntısı *hiç yansımazdır*. γ bağıntısının, $A \times A$ nın köşegenine ait hiç bir öğe kapsamadığına dikkat ediniz.

Örnek

Gerçek Sayılar Kümesi üzerinde tanımlı olan,

$$\delta = \{(x, y) \mid x < y\} \tag{6}$$

bağıntısı,

a. *yansımalıdır,*

b. *antisimetrik (yanal simetrisiz),*

c. *geçişkendir,*

d. *örgündür.*

Bunların ispatları aşağıdaki bağıntılardan kolayca görülür.

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} &\Rightarrow x \leq x \\ &\Rightarrow (x,x) \in \delta \\ &\Rightarrow \delta \quad \textit{yansımalıdır} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \neq y \wedge x < y &\Rightarrow y \nless x \\ &\Rightarrow (y,x) \notin \delta \\ &\Rightarrow \delta \quad \textit{antisimetriktir} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x < y \wedge y < z &\Rightarrow x < z \\ &\Rightarrow (x,z) \in \delta \\ &\Rightarrow \delta \quad \textit{geçişkendir} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x, y \in \mathbb{R} &\Rightarrow (x \leq y) \vee (y > x) \\ &\Rightarrow [(x,y) \in \delta] \vee [(y,x) \in \delta] \\ &\Rightarrow \delta \quad \textit{örgündür} \end{aligned}$$

Buradan görüldüğü gibi, antisimetrik bir bağıntının grafiğinde, köşegen dışındaki hiç bir noktanın köşegene göre simetriği yoktur. O halde bir δ bağıntısının antisimetrik olması için,

$$\delta \cap \delta^{-1} \setminus \Delta = \emptyset$$

olması gerekli ve yeterlidir.

Örnek

Gerçek Sayılar Kümesi üzerinde tanımlı olan,

$$\eta = \{(x,y) \mid x < y\} \tag{7}$$

bağıntısı,

a. *yansımasızdır,*
b. *antisimetrik,*
c. *simetrisizdir,*
d. *geçişkendir,*
e. *örgündür.*

(b),(c),(d),(e) nin ispatları yukarıdakiler gibi yapılabilir. (a) nın ispatını verelim. Hiç bir x gerçek sayısı için, $x < x$ bağıntısı sağlanmaz. Dolayısıyla,

$$[\forall x(x \in A) \Rightarrow (x,x) \notin \eta]$$

olur.

Simetrisiz bir bağıntının grafiğinde, hiç bir noktanın köşegene göre simetriği yoktur. O halde,

$$\eta \quad \textit{simetrisiz} \quad \Leftrightarrow \quad (\eta \cap \eta^{-1} = \emptyset)$$

olur.

Örnek

$E = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde tanımlı,

$$\theta = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (d, d)\}$$

bağıntısı simetriktir; ama,

$$\mu = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b), (d, d)\}$$

bağıntısı simetrik değildir.

6.4.1 Alıştırmalar

1. $A = \{a, b, c, d\}$ kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntıların türlerini belirtiniz.
   (a) $\beta_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (d, d)\}$
   (b) $\beta_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$
   (c) $\beta_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, a), (d, d)\}$
   (d) Eleman sayısı en az olan yansıyan bağıntı hangi bağıntıdır?
   (e) Yukarıdaki A kümesinde tanımlı, yansıyan ve yansıyan olmayan üçer bağıntı yazınız.
2. $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntıların türlerini belirtiniz. Ok diyagramlarını çiziniz.
   (a) $\beta_1 = \{(1, 1,)(1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$
   (b) $\beta_2 = \{(2, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 1), (1, 3)\}$
   (c) $\beta_3 = \{(3, 3), (2, 2), (1, 3), (3, 1), (2, 1), (1, 2)\}$
3. $A = \{x, y, z\}$ kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntıların türlerini belirtiniz. Grafiklerini çiziniz.
   (a) $\beta_1 = \{(x, x), (x, z), (z, z)\}$
   (b) $\beta_2 = \{(x, y), (y, z), (y, x)\}$
   (c) $\beta_3 = \{(x, x), (y, y)\}$
   (d) $\beta_4 = \{(x, y), (y, x), (z, z)\}$
   (e) $\beta_5 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (z, x)\}$
   (f) $\beta_6 = \{(x, x), (y, y), (z, z)\}$
   (g) $\beta_7 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, z), (z, x)\}$
4. $A = \{2, 4, 6\}$ kümesinde $\beta = \{(x, y) : x \mid y (x, y \text{ yi böler})\ \}$ bağıntısı tanımlanıyor.

(a) β bağıntısının öğelerini listeleyiniz.
(b) Ok diyagramını çiziniz.
(c) Grafiğini çiziniz.

5. $A = \{2, 4, 6\}$ kümesinde tanımlanan aşağıdaki bağıntıları türlerini belirleyiniz. Ok diyagramlarını ve grafiklerini çiziniz.

(a) $\beta_1 = \{(2, 2), (4, 4)\}$
(b) $\beta_2 = \{(2, 4), (4, 2), (6, 2)\}$
(c) $\beta_3 = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6)\}$

6. Aşağıdaki bağıntıların özeliklerini inceleyiniz.

$$\begin{aligned}
\beta_4 &= \{(2,2),(4,4),(6,6),(4,6)\} \\
\beta_5 &= \{(2,6),(4,2),(4,6)\} \\
\beta_6 &= \{(2,6)\} \\
\beta_7 &= \{(2,2),(4,4),(6,6),(4,2),(2,4),(6,4)\} \\
\beta_8 &= \{(6,6)\} \\
\beta_9 &= \{(2,4),(4,2)\}
\end{aligned}$$

7. Aşağıdaki bağıntıların geçişken olup olmadığını gösteriniz.

(a) $\beta_1 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
(b) $\beta_2 = \{(1, 3), (4, 2)\}$

8. Aşağıdaki bağıntıların geçişken olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \{(3,4),(2,1)\} \\
\beta_4 &= \{(4,1)\} \\
\beta_5 &= \{(4,1),(3,2)\} \\
\beta_6 &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,4),(4,1),(3,2)\}
\end{aligned}$$

9. $\beta_7 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ bağıntısının yansıyan, simetrik, antisimetrik ve geçişken olduğunu gösteriniz.

10. $A = \{1, 2, a\}$ kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntıların yansımalı, simetrik, antisimetrik ya da geçişkenlik özeliklerini inceleyiniz.

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(1,a)\} \\
\beta_2 &= \{(2,a),(a,2),(a,1)\} \\
\beta_3 &= \{(1,1),(2,2),(a,a)\} \\
\beta_4 &= \{(1,1),(2,2),(a,a),(2,1),(a,2)\} \\
\beta_5 &= \{(a,2),(1,1)\} \\
\beta_6 &= \{(1,1),(2,2),(a,a),(1,a),(a,1)\}
\end{aligned}$$

11. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ kümeleri ile $\beta \subset A \times B$ ve $\beta = \{(x, y) \mid y = 2x\}$ bağıntısı veriliyor.
    a) β yı liste yöntemi ile yazınız.
    b) β nın ok ve koordinat grafiklerini çiziniz.
    c) β ile β^{-1} in özeliklerini inceleyiniz.

12. $A = \{a, b, c, d\}$ kümesinde tanımlı aşağıdaki özelikleri sağlayan bağıntılar yazınız.
    a) Yansıyan, simetrik değil.
    b) Yansıyan, simetrik, antisimetrik değil.
    c) Yansıyan değil, simetrik ve antisimetrik.
    d) Yansıyan, simetrik, antisimetrik, geçişken.
    e) Yansıyan, simetrik, geçişken.
    f) Yansıyan, antisimetrik, geçişken.
    g) Yansıyan değil, simetrik değil, antisimetrik değil, geçişken.

13. $A = \{x, y, z\}$ kümesinde tanımlı $\beta = \{(x, x), (x, y), (y, z), (y, x)\}$ bağıntısından hangi sıralı çift atılırsa
    a) Bağıntı simetrik olur.
    b) Bağıntı antisimetrik olur.

14. $A = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde tanımlı
    $\beta = \{(a, a), (b, c), (c, d), (d, a)\}$ bağıntısı veriliyor.
    a) β, ya hangi ikililer katılırsa geçişken olur?
    b) β, ya hangi ikililer katılırsa simetrik olur?
    c) β, ya hangi ikililer katılırsa yansıyan olur?

15. $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntıların türlerini belirleyiniz.
    a) $\beta = \{(x, y) : \quad x \mid y$ (x, y yi tam böler)$\}$

    b) $\beta = \{(x, y) : y = 3x + 1\}$

    c) $\beta = \{(x, y) : y < x - 1\}$

    d) $\beta =: (x, y) : x \mid y^3\}$

16. Aşağıdaki bağıntıların türlerini belirleyiniz.
    (a) Bir kümenin öğeleri arasındaki *eşitlik*,
    (b) Düzlemdeki doğrular arasındaki *diklik*,
    (c) Düzlemdeki doğrular arasında *çakışma ya da paralel olma*,

(d) Düzlemdeki üçgenler arasındaki *benzerlik*.

17. Bir has alt kümede yansıyan bağıntı, üst kümede de yansıyan mıdır? Neden?

18. Bir has üst kümede yansıyan bağıntı, alt kümede de yansıyan mıdır? Neden?

19. Bir A kümesinde tanımlı β bağıntısı için,
a) β yansıyan ise β^{-1} de yansıyan mıdır?
b) β simetrik ise β^{-1} de simetrik midir?
c) β antisimetrik ise β^{-1} de yan simetrisiz midir?
d) β geçişken ise β^{-1} de geçişken midir?

20. $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ kümesinde tanımlı

$$\beta = \{(x, y) \mid y = 2x - 1\}$$

bağıntısı veriliyor.

a) β yı liste yöntemi ile yazınız.
b) β^{-1} ters bağıntısını liste yöntemi ile yazınız.
c) β ile β^{-1} in grafiklerini aynı analitik düzlemde çiziniz.

21. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinde tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde yansıyan, simetrik ve geçişken β_1 ve β_2 gibi iki bağıntı yazınız.
a) $\beta_1 \cap \beta_2$ de yansıyan simetrik geçişken olsun.
b) $\beta_1 \cup \beta_2$ de yansıyan simetrik geçişken olsun.

22. $A = \{x, y, z\}$ kümesinde β_1 ve β_2 gibi antisimetrik öyle iki bağıntı yazınızki,

a) $\beta_1 \cup \beta_2$ de antisimetrik (ters simetrik) olsun.
b) $\beta_1 \cup \beta_2$ simetrik olsun.