Bölüm 8

DENKLİK BAĞINTILARI

8.1 DENKLİK BAĞINTISI

8.1.1 Eşitlik Kavramının Genelleşmesi

Matematikte ve başka bilim dallarında, birbirlerine eşit olmayan, ama eşitliğe benzer niteliklere sahip nesnelerle sık sık karşılaşırız. Bu tür nesneleri inceleyebilmek için, eşitlik kavramını genişleterek, denklik (eşdeğerlik) kavramını tanımlıyoruz.

Tanım 8.1.1. *Yansıma, simetri* ve *geçişkenlik* özeliklerine sahip bağıntılara, *denklik bağıntıları,* denilir.

Bu tanımın simgesel açıklaması şöyledir: X kümesi üzerinde aşağıdaki özeliklere sahip β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır:

$$x \in X \Rightarrow x\beta x \quad \text{yansımalı} \tag{8.1}$$

$$(x, y \in X \wedge x\beta y \Rightarrow y\beta x \quad \text{simetrik} \tag{8.2}$$

$$(x, y, z \in X \wedge x\beta y \wedge y\beta z \Rightarrow x\beta z \quad \text{geçişken} \tag{8.3}$$

Boş olmayan bir A kümesi üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı β olsun. $(x, y) \in \beta$ ise x ile y öğeleri, β denklik bağıntısına göre, birbirlerine *denktir*, denilir ve

$$x \equiv y \qquad x \equiv y \,(\mod \beta) \qquad \text{ya da} \qquad x \sim y \tag{8.4}$$

simgelerinden birisiyle yazılır.

Bazan *denklik* terimi yerine *eşdeğerlik* terimi kullanılır.

8.2 Denklik Sınıfları

β bağıntısına göre, x öğesine denk olan bütün öğelerden oluşan alt kümeye, x öğesinin *denklik sınıfı,* diyecek ve

$$\overline{x} \quad , \quad [x] \quad , \quad [x]_\beta$$

simgelerinden birisiyle göstereceğiz. Buna göre,

$$\bar{x} = [x] = [x]_\beta = \{y \mid (x, y) \in \beta\} \tag{8.5}$$
$$= \{y \mid x\beta y\} \tag{8.6}$$

yazabiliriz.

Teorem 8.2.1. *(i) β, boş olmayan bir X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ise, β nın denklik sınıfları X kümesinin bir ayrışımını oluşturur.*

(ii) Tersine olarak, X kümesinin her ayrışımına karşılık, bu ayrışımı oluşturan alt kümeleri denklik sınıfları olarak kabul eden bir denklik bağıntısı vardır.

Yukarıdaki özelikleri şöyle de ifade edebiliriz:

1. X kümesinin her öğesi, bir ve yalnızca bir denklik sınıfına aittir. Buna göre denklik sınıflarının birleşimi X kümesine eşittir:

$$X = \cup\{\overline{x} \mid x \in X\}.$$

2. İki denklik sınıfı ya birbirlerine eşittir ya da ayrıktırlar:

$$x, y \in X \quad \Rightarrow \quad [(\overline{x} = \overline{y}) \vee (\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset)].$$

İSPAT:

Birinci kısım için, β nın denklik sınıfları ailesinin `Tanım` 7.1.1 paragraftaki ayrışım tanımında verdiğimiz (i), (ii), (iii) ve (iv) koşullarını sağladığını göstereceğiz. β nın herhangi bir $[x]$ denklik sınıfı, hiç değilse, x öğesini kapsadığından $[x] \neq \emptyset$ dır. Öte yandan $X = \cup_{x \in X}[x]$ olduğu apaçıktır. Böylece (ii) ve (iv) özelliklerinin varlığı gösterilmiş oldu. (iii) özeliğini göstermek için, $[x]$ ve $[y]$ gibi herhangi iki denklik sınıfı aldığımızda, ya $[x] = [y]$ ya da $[x] \cap [y] = \emptyset$ olduğunu göstermemiz yetecektir. Gerçekten,

$$a \in [x] \cap [y] \Rightarrow a\beta x \wedge a\beta y \Rightarrow x\beta a \wedge a\beta y \tag{8.7}$$

olacaktır. Şimdi

$$\forall b(b \in [x]) \Rightarrow b \in [y] \Rightarrow [x] \subset [y] \tag{8.8}$$

olacağını görebiliriz. Çünkü $b \in [x]$ demek $b\beta x$ demektir. Öte yandan $x\beta y$ olduğunu gördük. Şu halde,

$$\forall b(b \in [x]) \Rightarrow b\beta x \wedge x\beta y \Rightarrow b\beta y \Rightarrow b \in [y] \tag{8.9}$$

dir. Tamamen benzer şekilde $[x] \supset [y]$ olduğu da gösterilir. Şu halde, arakesitleri boş olmayan her $[x], [y]$ denklik sınıflan özdeş olarak eşittir. Böylece teoremin ilk kısmını ispatlamış olduk.

Şimdi X kümesinin herhangi bir $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ ayrışımı verilmiş olsun, Ayrışım tanımına göre

$$\alpha, \beta \in I \wedge \alpha \neq \beta \Rightarrow A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset \tag{8.10}$$

olacağından, herhangi bir $x \in X$ verildiğinde $x \in A_\alpha$ olacak şekilde bir tek $\alpha \in I$ vardır. Buna göre, X üzerinde

$$x\gamma y \Leftrightarrow [\exists \alpha(\alpha \in I)\, x, y \in A_\alpha \tag{8.11}$$

bağıntısını tanımlayalım, γ nın bir denklik bağıntısı olduğu ve γ nın denklik sınıflarının $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ ailesinden ibaret olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 8.2.1. X kümesi üzerindeki bir denklik bağıntısı β olsun. β nın farklı denklik sınıflarından oluşan aileye,X in β ya göre *oran (bölüm) kümesi* diyecek ve X/β ile göstereceğiz; yani

$$X/\beta = \{[x], [y], [z], \ldots\} = \{[x] : x \in X\} \tag{8.12}$$

dir.

Örnekler

1. $A = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde,

   $$\beta = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), ((b,c), (b,d), (c,b), (c,d), (d,c), (d,b)\}$$

   bağıntısının grafiğini çiziniz. Denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz. Denklik sınıflarını yazınız.

   Çözüm: β bağıntısının grafiği çizilirse şunlar hemen görülür:

   (a) Köşegen bağıntıya ait olduğundan, β yansımalıdır.

   (b) Bağıntıya ait noktalar, köşegene göre simetrik olduğundan, β simetriktir.

   (c) Her $x, y, z \in A$ için,

   $$[((x,y) \in \beta) \wedge ((y,z) \in \beta)] \Rightarrow (x,z) \in \beta$$

   olduğu görülebilir. Örneğin,

   $$[((c,b) \in \beta) \wedge ((b,d) \in \beta)] \Rightarrow (c,d) \in \beta$$

   dir.

   β nın yalnızca iki denklik sınıfı vardır:
   $\overline{a} = \{a\}$
   $\overline{b} = \{b, c, d\}$
   $\overline{b} = \overline{c} = \overline{d}$
   olduğuna dikkat ediniz.

2.

$$\beta = \{(2,2),(2,6),(4,4),(6,6),(4,6),(6,2),(6,4),(2,4),(4,2)\}$$

bağıntının grafiğini çiziniz ve bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz. Denklik sınıflarını yazınız.

Çözüm: Aranan bağıntı $A = \{2,4,6\}$ kümesi üzerinde tanımlıdır. $\overline{2} = \overline{4} = \overline{6}$ olduğundan, β nın bir tek denklik sınıfı vardır: $\overline{2} = \{2,4,6\}$.

3. İki kesrin eşitliğini,

$$\left(\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (ad = bc)$$

bağıntısı ile tanımlıyoruz. Bunun bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

(a)

$$\left(\frac{a}{b} \equiv \frac{a}{b}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (ab = ab)$$

olduğundan $\equiv$ yansımalıdır.

(b)

$$\left(\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}\right) \Leftrightarrow (ad = bc) \Leftrightarrow (bc = ad) \Leftrightarrow \left(\frac{c}{d} \equiv \frac{a}{b}\right)$$

olduğundan, $\equiv$ simetriktir.

(c)

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d})\right) \wedge \left(\frac{c}{d} \equiv \frac{e}{f}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad (ad = bc) \wedge (cf = de) \\ &\Leftrightarrow \quad (af = be) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{b} \equiv \frac{e}{f}\right)\end{aligned}$$

olduğundan, $\equiv$ geçişkendir.

4. Analitik düzlemdeki bütün doğruların kümesi üzerinde, $\parallel$ simgesiyle göstereceğimiz paralelliği

$$x \parallel y \quad \Leftrightarrow \quad [(x = y) \vee (x \cap y = \emptyset] \tag{3}$$

biçiminde tanımlayalım. Paralellik bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: D, düzlemdeki bütün doğruların kümesi olsun.

$$\beta = \{(x,y) \mid (x,y \in D) \wedge (x \parallel y)\}$$

bağıntısını tanımlayalım. β nın bir denklik bağıntısı olduğunu görmek için, *yansıma, simetri* ve *geçişme* özeliklerine sahip olduğunu göstermeliyiz.

(a) Her doğru kendisine paralel olduğundan, $x \in D \Rightarrow x \parallel x$ olur; yani, paralellik *yansıma* özeliğine sahiptir.

(b) $x \parallel y \Rightarrow y \parallel x$ olduğundan, paralellik bağıntısı *simetriktir.*

(c) $(x \parallel y \wedge y \parallel z) \Rightarrow x \parallel z$ olduğundan, paralellik bağıntısı geçişkendir.

Düzlemde aynı doğrultuya sahip olan doğrular; yani, birbirlerine paralel olan doğrular, aynı denklik sınıfı içindedirler. Düzlemde, sonsuz doğrultu olduğu için, paralellik bağıntısının denklik sınıfları sonsuz çokluktadır.

5. Tamsayılar kümesi üzerinde *"farkları çift olanlar eştir"* bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Bunu görmek için, Tamsayılar Kümesini $\mathbb{Z}$ ile gösterelim ve $\mathbb{Z}$ üzerinde,

$$\beta = \{(m,n) \mid (m-n) \quad \text{çifttir}\}$$

bağıntısını tanımlayalım. β nın yansımalı, simetrik ve geçişli olduğunu gösterelim.

(a) $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n - n = 0$ çifttir. O halde, β yansımalıdır.

(b) $(m,n \in \mathbb{Z}) \wedge (m-n)$ çift ise $(n-m)$ de çift olacağından, β simetriktir.

(c) $(m,n,r \in \mathbb{Z})$ için$(m-n)$ çift ve $(n-r)$ çift ise $(m-r) = (m-n) + (n-r)$ de çift olacağından, β geçişlidir.

$(m,n) \in \beta \Leftrightarrow m - n =$ çift olabilmesi için, m,n tamsayılarının her ikisi de aynı zamanda ya çift ya da tek olmalıdır. Öyleyse, β bağıntısına göre tek sayılar birbirlerine denk; çift sayılar birbirlerine denktir. Bir tek sayı ile bir çift sayı aynı denklik sınıfında olamazlar. Öyleyse, β ya göre, yalnızca iki denklik sınıfı vardır:

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{\ldots,-8,-6,-4,-2,0,,2,4,6,8,\ldots\} \\ \overline{1} &= \{\ldots,-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9\ldots\} \end{aligned}$$

6. Herhangi bir küme üzerindeki eşitlik, bir denklik bağıntısıdır.

X boş olmayan bir küme olsun. Bunun üzerinde,

$$\beta = \{(x,y) \mid x = y \}$$

bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu göstermeliyiz.

Eşitlik Beliti'nden,

(a) Her öğe kendisine eşittir; yani $x \in X \Rightarrow x = x$ olduğundan β bağıntısı yansımalıdır.

(b) $(x,y \in X)$ ve $x = y$ ise $y = x$ olduğundan β bağıntısı simetriktir.

(c) $(x,y,z \in X)$ için $x = y$ ve $y = z$ ise $x = z$ olduğundan β bağıntısı geçişlidir.

yazabiliriz.

O halde, eşitlik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Bu örnekte, bir x öğesinin denklik sınıfı, yalnızca kendisinden oluşur: $\overline{x} = x$ dir.

7. Bir denklik bağıntısının tersinin de bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

   Çözüm: Boş olmayan bir A kümesi üzerinde, β bir denklik bağıntısı ise, β yansımalı, simetrik ve geçişkendir. Şimdi, bunun tersi olan

   $$\beta^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in \beta\}$$

   bağıntısının da aynı özelikleri sağladığını göstermeliyiz.

   $$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow (x,x) \in \beta \\ &\Rightarrow (x,x) \in \beta^{-1} \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} (x,y) \in \beta^{-1} &\Rightarrow (y,x) \in \beta (\beta^{-1} \textit{in tanımından}) \\ &\Rightarrow (x,y) \in \beta \quad (\beta \textit{simetrik olduğundan}) \\ &\Rightarrow (y,x) \in \beta^{-1} \quad (\beta^{-1} \textit{in tanımından}) \\ &\Rightarrow \beta^{-1}, \quad \textit{simetriktir} \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} \big((x,y) \in \beta^{-1}\big) \wedge \big((y,z) \in \beta^{-1}\big) &\Rightarrow ((y,x) \in \beta) \wedge ((z,y) \in \beta) \\ &\Rightarrow ((z,y) \in \beta) \wedge ((y,x) \in \beta) \\ &\Rightarrow (z,x) \in \beta \\ &\Rightarrow (x,z) \in \beta^{-1} \\ &\Rightarrow \beta^{-1}, \quad \textit{geçişkendir} \end{aligned}$$

8. *Bell Sayıları:* n öğeli bir kümede tanımlanabilecek denklik bağıntılarının sayısıdır. Örneğin,

   (a) $X_1 = \{x_1\}$ kümesinde 1 tane denklik bağıntısı kurulabilir.

   (b) $X_2 = \{x_1, x_2\}$ kümesinde 2 tane denklik bağıntısı kurulabilir.

   (c) $X_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ kümesinde 5 tane denklik bağıntısı kurulabilir.

   (d) $X_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ kümesinde 15 tane denklik bağıntısı kurulabilir.

   (e) $X_5 = \{x_1, x_2, x_3, x4, x_5\}$ kümesinde 52 tane denklik bağıntısı kurulabilir.

   (f) $X_6 = \{x_1, x_2, x_3, x4, x_5, x_6\}$ kümesinde 203 tane denklik bağıntısı kurulabilir.

(g) $X_7 = \{x_1, x_2, x_3, x4, x_5, x_6, x_7\}$ kümesinde 877 tane denklik bağıntısı kurulabilir.

(h) $X_8 = \{x_1, x_2, x_3, x4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ kümesinde 4140 tane denklik bağıntısı kurulabilir.

(i) $X_9 = \{x_1, x_2, x_3, x4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$ kümesinde 21147 tane denklik bağıntısı kurulabilir.

(j) $X_{10} = \{x_1, x_2, x_3, x4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ kümesinde 115975 tane denklik bağıntısı kurulabilir. $\vdots$

Genel olarak, Bell sayıları

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

yinelgen(recursive) formülü ile bulunur.

8.3 ALIŞTIRMALAR

1. Kardeşlik bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

2. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ kümesinde tanımlı,

$$\beta = \{(x, y) : 4 \mid (x - y)\}$$

bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz ve denklik sınıflarını bulunuz.

3. Analitik düzlemdeki doğrular kümesi üzerinde ,*"diklik"* bağıntısının bir denklik bağıntısı olmadığını gösteriniz.

4. Aşağıdaki bağıntılar, $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde tanımlıdır. Bunlardan hangileri denklik bağıntısıdır? Denklik bağıntısı olanların, denklik sınıflarını yazınız.

   (a) $\beta_1 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$

   (b) $\beta_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 1), (1, 3)\}$

   (c) $\beta_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 1), (1, 2)\}$

   (d) $\beta_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

5. Bir has alt kümede tanımlı bir denklik bağıntısı, üst küme üzerinde de bir denklik bağıntısı mıdır? Neden?

6. Bir has üst kümede tanımlı denklik bağıntısının, alt kümeye daraltılmışı da bir denklik bağıntısı mıdır? Neden?

7. Bir kümeler ailesi üzerinde *nicelik sayılarının eşitliği* bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

8. Tamsayılar kümesi üzerinde

$$(m, n) \in \beta \Leftrightarrow 5 \mid (m - n)$$

bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz. Denklik sınıflarını yazınız.

9. Analitik düzlemdeki üçgenler kümesi üzerinde tanımlı *benzerlik* bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

10. Analitik düzlemdeki üçgenler kümesi üzerinde tanımlı *eşlik* bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

11. Bir okuldaki öğrenciler arasındaki *"arkadaş olma"* bağıntısı bir denklik bağıntısı mıdır? Neden?

12. Aynı bir küme üzerinde tanımlı iki denklik bağıntısının arakesiti de bir denklik bağıtısı mıdır? Neden?

13. Bir denklik bağıntısının tersi de bir denklik bağıntısı mıdır? Neden?

14. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi veriliyor. Aşağıdakilerden hangileri A kümesinin bir ayrışımıdır? Nedenleriyle açıklayınız

    (a) $\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$
    (b) $\{\{1, 2, 5\}, \{3, 4\}\}$
    (c) $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$
    (d) $\{\{1\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$
    (e) $\{\{2, 5\}, \{3\}\}$
    (f) $\{\{1, 2, 4, 5\}, \{3, 4\}\}$
    (g) $\{\{1, 2, 5\}, \{1, 2\} \cap \{3\}, \{3, 4\}\}$

15. $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde eşitlik bağıntısı $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ dır. Sağlayınız.