Bölüm 9

SIRALAMA BAĞINTILARI

VARLIKLARI KARŞILAŞTIRMAK

Karşılaştırma kavramı, bilimde olduğu kadar, günlük yaşantımızda da çok önemlidir. *Daha ucuz,* deyiminden, hemen hepimiz anlatılmak isteneni doğru anlarız. Ama *"daha güzel"* deyiminden, hepimiz aynı şeyi anlamayabiliriz. Bunun nedeni, *daha güzel* kavramının tanımsız oluşudur.

Bu tür belirsizlikleri gidermek için, karşılaştırma kavramının matematiksel temellerini kuracağız.

9.1 KISMÎ SIRALAMA BAĞINTISI

Bazan, bir küme içinde belirli öğeleri kendi aralarında sıralayıp, öteki öğeleri dışlamak gerekebilir. Örneğin, sınıfınızdaki sarışın kızları boy sırasına dizerseniz; erkekler ve sarışın olmayan kızlar bu sıralamanın dışında kalacaktır. Önce, bu tür sıralamayı, açıklayacağız.

Tanım 9.1.1. Yansımalı, antisimetrik ve geçişken bir bağıntıya *kısmî (tikel) sıralama bağıntısı,* denilir.

β, A kümesi üzerinde bir kısmî sıralama bağıntısı ve $(x, y) \in \beta$ ise, *"x öğesi, y öğesinden önce gelir,"* ya da *"y öğesi, x öğesinden sonra gelir,"* diyoruz. Ancak, sayılardan edindiğimiz alışkanlıkla, çoğu kez,

x öğesi y öğesinden küçüktür, ya da

y öğesi, x öğesinden büyüktür,

diyeceğiz. Bunu biraz daha ileri götürüp,

$$(x, y) \in \beta, \qquad x\beta y$$

yerine

$$x \preceq y, \qquad y \succeq x$$

simgelerini eş anlamda kullanacağız. Tanımımızı, yeni simgelerle yapabiliriz:

Tanım 9.1.2. Boş olmayan bir A kümesi üzerinde tanımlı bir $\preceq$ bağıntısı verilsin.

a.	$x \in X$	$\Rightarrow$	$x \preceq x$
b.	$(x, y \in X \wedge x \neq y \wedge x \preceq y$	$\Rightarrow$	$\neg(y \preceq x)$
c.	$(x, y, z \in X \wedge x \preceq y \wedge y \preceq z)$	$\Rightarrow$	$x \preceq z$

özeliklerine sahip $\preceq$ bağıntısı bir ***kısmî (tikel) sıralama bağıntısı***'dır.

Bu durumda $(X, \preceq)$ sistemine kısmî sıralı bir sistemdir [kss] diyeceğiz.

Eğer $a \preceq b$ ve $a \neq b$ ise, a öğesi kesinlikle b öğesinden küçüktür diyor ve bunu $a \prec b$ simgesiyle gösteriyoruz. Simgelerle söylersek

$$a \prec b \Leftrightarrow a \preceq b \wedge a \neq b \tag{9.1}$$

dir.

Kısmî Sıralama Bağıntısı, kümeye ait her öğe çiftini birbiriyle karşılaştırmayabilir; yani, herhangi iki öğeden birisi büyük, ötekisi küçük olmak zorunda değildir. Bağıntıya ***kısmî*** denmesinin nedeni de budur.

Tanım 9.1.3. r ile n iki tamsayı olmak üzere, r tamsayısı n tamsayısını kalansız bölüyorsa, *r sayısı n yi tam bölüyor,* diyecek ve bunu, kısaca, $r \mid n$ simgesiyle; eğer tam bölemiyorsa $r \not| n$ simgesiyle göstereceğiz.

Örnekler

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinde tanımlı,

$$\beta = \{(x, y) : x \mid y\}$$

bağıntısının bir kısmî sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: β nın yansımalı, antisimetrik ve geçişken olduğunu göstermeliyiz.

(a) Her tamsayı kendisini tam böler. O halde,

$$\forall x \in A \Rightarrow x \mid x \Rightarrow (x, x) \in \beta \quad \Rightarrow \beta \textit{ yansımalıdır.}$$

(b) Örneğin, $3 \mid 6$ dır; ama $6 \not| 3$ dür. Bunu genel olarak yazarsak,

$$(x \neq y) \wedge (x, y \in A) \wedge (x \mid y) \Rightarrow (y \not| x) \Rightarrow \beta \textit{ antisimetriktir}$$

olur.

(c) Örneğin,

$$(2, 4, 8 \in A) \wedge (2 \mid 4) \wedge (4 \mid 8) \Rightarrow (2 \mid 8)$$

dir. Bunu genel olarak yazarsak,

$$(x, y, z \in A) \wedge (x \mid y) \wedge (y \mid z) \Rightarrow (x \mid z) \Rightarrow \beta \textit{ geçişkendir}$$

olur.

O halde, β bir kısmî sıralama bağıntısıdır.

2. Bir X kümesinin bütün alt kümelerinden oluşan kümeyi (aileyi) $\mathcal{P}(X)$ ile gösterelim; yani,
$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\} \tag{1}$$
olsun. Bu aile üzerinde kapsama bağıntısının bir kısmî sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm:
$$\beta = \{(A, B) \mid (A \subset B) \wedge (A, B \in \mathcal{P}(X))$$
bağıntısının yansımalı, antisimetrik ve geçişken olduğunu göstermeliyiz.

(a) Her küme kendisini kapsar. Dolayısıyla,
$$\forall A \in \mathcal{P}(X) \Rightarrow A \subset A \Rightarrow (A, A) \in \beta \quad \Rightarrow \beta \textit{ yansımalıdır.}$$

(b) A kümesi B nin has bir alt kümesi ise, B kümesi A nın alt kümesi olamaz:
$$(A \neq B) \wedge (A, B \in \mathcal{P}(X) \wedge (A \subset B) \Rightarrow (B \not\subset A) \Rightarrow \beta \textit{ antisimetriktir}$$

(c)
$$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C) \Rightarrow \beta \textit{ geçişkendir}$$

Tanım 9.1.4. $(A, \preceq))$ kısmen sıralanmış bir sistem olsun. A kümesine ait a ve b gibi herhangi iki öğe verilsin. Eğer $a \preceq b$ ya da $b \preceq a$ oluyorsa a ile b öğelerine $\preceq$ bağıntısına göre *mukayese edilebilir* iki öğedir, diyeceğiz.

Kısmen sıralanmış bir kümenin herhangi iki öğesinin daima mukayese edilebilir olması gerekmez. Zaten *"kısmen sıralanmış"* deyimi de buradan gelmektedir.

Kısmen sıralanmış bir sistemi bazan bir çizgi diyagramla göstermek uygun olur. Bunun için $x \preceq y$ ise x öğesini temsil eden nokta, y öğesini temsil eden noktaya göre diyagramda daha aşağıda bir yere konuşlandırılır. x den y noktasına giden yukarıya doğru yönlenmiş bir doğru parçası ile ya da doğru parçalarından oluşan kırık bir çizgi ile birleştirilir.

9.2 SINIRLAR

Alt ve Üst Sınırlar

Tanım 9.2.1. $(X, \preceq))$ kısmen sıralanmış bir sistem olsun ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer bir $w \in X$ öğesi A nın her öğesinden küçükse (önce geliyorsa); yani
$$\forall a(a \in A) \Rightarrow w \preceq a \tag{9.2}$$
ise, w öğesine A kümesinin bir *alt sınırıdır*, denilir.

Tersine olarak, bir $u \in X$ öğesi A nın her öğesinden büyükse (sonra geliyorsa); yani

$$\forall a(a \in A) \Rightarrow a \preceq u \tag{9.3}$$

ise, u öğesine A kümesinin bir *üst sınırıdır*, denilir.

9.2.1 infimum ve supremum

Alt Sınırların En Büyüğü

Tanım 9.2.2. $(X, \preceq))$ kısmen sıralanmış bir sistem olsun ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Aşağıdaki iki özeliğe sahipse, $\alpha \in X$ öğesine, A kümesinin *alt sınırlarının en büyüğüdür* (aseb, ebas, infimum, inf) denilir.

(i) α öğesi A kümesinin bir alt sınırıdır.

(ii) α öğesi A kümesinin alt sınırlarından oluşan kümenin bir üst sınırıdır.

Bu durumda

$$\alpha = aseb(A) \quad \alpha = \inf(A) \quad \alpha = infimum(A) \tag{9.4}$$

simgelerinden birisini kullanırız.

Üst Sınırların En Küçüğü

Tanım 9.2.3. $(X, \preceq))$ kısmen sıralanmış bir sistem olsun ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Aşağıdaki iki özeliğe sahipse, $\beta \in X$ öğesine, A kümesinin *üst sınırlarının en küçüğüdür* (üsek, eküs, supremum, sup) denilir.

(i) β öğesi A kümesinin bir üst sınırıdır.

(ii) β öğesi A kümesinin üst sınırlarından oluşan kümenin bir alt sınırıdır.

Bu durumda

$$\beta = \text{üsek}(A) \quad \beta = \sup(A) \quad \beta = \text{supremum}(A) \tag{9.5}$$

simgelerinden birisini kullanırız.

$(X, \preceq))$ kısmen sıralanmış bir sistem olsun ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin birden çok alt sınırı ve birden çok üst sınırı var olabilir. Tabii, A kümesinin hiç alt sınırı ya da hiç üst sınırı olmayabilir.

Benzer şekilde, A kümesinin alt sınırlarının en büyüğü (inf) ya da üat sınırlarının en küçüğü (sup) olmayabilir. Ama varsa, bunlar ancak birer tanedir. Başka bir deyişle, $\inf(A)$ ve $\sup(A)$ öğelerinin her ikisi de var olmayabilir, yalnız birisi varolabilir ya da her ikisi de var olabilir. Varlık halinde bunlar birer tanedir. Kolayca sezilebileceği gibi, A kümesinin bir alt sınırı, bir üst sınırı, $\inf(A)$ ve $\sup(A)$ öğeleri varsa A kümesine ait olabilirler ya da olmayabilirler.

9.2.2 Minimal ve Maksimal Öğeler

Tanım 9.2.4. $(X, \preceq))$ kısmen sıralanmış bir sistem olsun ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin hiç bir öğesi bir $b \in A$ öğesinden büyük değilse; yani

$$\forall a(a \in A \wedge b \preceq a) \Rightarrow a = b \tag{9.6}$$

ise, b öğesine A kümesinin *maksimal (büyükçe)* bir öğesidir, denilir.

Benzer şekilde, A kümesinin hiç bir öğesi bir $b \in A$ öğesinden küçük değilse; yani

$$\forall a(a \in A \wedge a \preceq k) \Rightarrow a = k \tag{9.7}$$

ise, k öğesine A kümesinin *minimal (küçükçe)* bir öğesidir, denilir.

9.2.3 Maksimum ve Minimum

Tanım 9.2.5. $(X, \preceq))$ kısmen sıralanmış bir sistem olsun ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. $\beta = \sup(A)$ var ve $\beta \in A$ ise, β öğesine A kümesinin *enbüyük öğesi (maksimum)* diyeceğiz.

Benzer şekilde, $\alpha = \inf(A)$ var ve $\alpha \in A$ ise, α öğesine A kümesinin *enküçük öğesi (minimum)* diyeceğiz.

9.3 TAM SIRALAMA BAĞINTISI

Tanım 9.3.1. Örgün kısmî sıralama bağıntısına, tam sıralama bağıntısı, denilir.

Anımsanacağı üzere, bağıntının örgün olması demek, kümeye ait her öğe çiftinin bağıntının grafiğinde olması demektir. Bunu sıra bağıntısı için düşünürsek, her öğe çifti birbiriyle mukayese edilebilir demektir. Buna göre, boş olmayan bir A kümesi üzerinde tanımlı bir $\preceq$ bağıntısı yansımalı, antisimetrik, geçişken ve örgün ise, bir tam sıralama bağıntısıdır. Bunu simgelerle ifade edelim:

Boş olmayan bir A kümesi üzerinde tanımlı bir $\preceq$ bağıntısı verilsin.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{a.} & x \in X & \Rightarrow & x \preceq x \\
\text{b.} & (x, y \in X \wedge x \neq y \wedge x \preceq y & \Rightarrow & \neg(y \preceq x) \\
\text{c.} & (x, y, z \in X \wedge x \preceq y \wedge y \preceq z) & \Rightarrow & x \preceq z \\
\text{d.} & (x, y \in X) & \Rightarrow & (x \preceq y) \vee (y \preceq x)
\end{array}$$

özeliklerine sahip $\preceq$ bağıntısı bir *Tam Sıralama Bağıntısı*'dır.

Tam Sıralama Bağıntısı, kümeye ait her öğe çiftini birbiriyle karşılaştırır; yani, herhangi iki öğeden birisi büyük, ötekisi küçük olmak zorundadır.

Tam sıralama bağıntısına *tümel sıralama, doğrusal sıralama, lineer sıralama* gibi adlar da verilir.

9.4 İYİ SIRALAMA

Tanım 9.4.1. $(X, \preceq))$ kısmen sıralanmış bir sistem olsun. X kümesinin boş olmayan her A kümesinin en küçük (minimum) öğesi varsa X kümesi iyi sıralıdır ve $(X, \preceq))$ iyi sıralanmış bir sistemdir, denilir.

Kolayca sezilebildiği gibi, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi iyi sıralıdır. Gerçekte, iyi sıralı sistem, doğal sayıların sıra özeliğine benzer özeliğe sahip olan sistemdir.

Uyarı 9.4.1. $(X, \preceq))$ kısmen sıralanmış bir sistem olsun ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Aşağıdaki özeliklere dikkat edilmelidir.

1. A kümesinin *alt ve üst sınırları* A kümesine ait olmayabilir. Gerçekte, çoğu örnekte böyledir.
2. A kümesinin *minimal ve maksimal* öğeleri var olmayabilir. Var olduklarında bunlar A kümesine ait olurlar.
3. A kümesinin *infimumu ve supremumu* var olmayabilir. Var olduklarında A kümesine ait olmayabilirler.
4. A kümesinin *maksimum ve minimum* öğeleri var olmayabilir. Var olduklarında bunlar A kümesine ait olurlar.
5. A kümesinin *maksimum* öğesi varsa *supremuma* eşittir. Maksimum olmadığı halde supremum olabilir.
6. A kümesinin *minimum* öğesi varsa *infimuma* eşittir. Minimum olmadığı halde infimum olabilir.
7. A kümesinin alt sınır , üst sınır , minimal ve maksimal öğeleri hiç olmayabileceği gibi birden çok (bazan sonsuz sayıda) olabilirler.
8. A kümesinin inf , sup, minimum ve maksimum öğeleri hiç olmayabilir; ama var iseler tek olurlar.
9. $(X, \preceq))$ tam sıralı ise A kümesinin minimal öğesi ile minimumu aynıdır.
10. $(X, \preceq))$ tam sıralı ise A kümesinin maksimal öğesi ile maksimumu aynıdır.
11. $(X, \preceq))$ iyi sıralı ise A kümesinin minimal öğesi, minimumu ve infimumu çakışır ve daima vardır.

Örnekler

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinde tanımlı

$$\preceq \quad = \quad \{(x, y) \mid x \leq y\}$$

bağıntısının bir tam sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\preceq$ bağıntısının yansımalı, antisimetrik, geçişken ve örgün olduğunu göstermeliyiz. Bunlar, $\leq$ bağıntısının gerçek sayılar kümesi üzerindeki özeliklerden çıkar. Zaten, $\preceq$ bağıntısı, sayılardaki $\leq$ bağıntısının soyut kümelere genişletilmesinden başka bir şey değildir. Dolayısıyla, özel olarak, sayılara uygulandığında $\leq$ bağıntısına denk olur. Bunu aşağıdaki gerektirmelerden kolayca görebiliriz.

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x = x \\ &\Rightarrow (x = x) \vee (x < x) \\ &\Rightarrow x \leq x \\ &\Rightarrow x \preceq x \\ &\Rightarrow \preceq \textit{ yansımalıdır.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y \in A) \wedge (x \neq y) \wedge (x \leq y) &\Rightarrow (x > y) \\ &\Rightarrow (y \nleq x) \\ &\Rightarrow y \npreceq x \\ &\Rightarrow \preceq \textit{ antisimetriktir.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y, z \in A) \wedge (x \leq y) \wedge (y \leq z) &\Rightarrow (x \leq z) \\ &\Rightarrow (x \preceq z) \\ &\Rightarrow \preceq \textit{ geçişkendir.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x, y \in A &\Rightarrow (x < y) \vee (x = y) \vee (x > y) \\ &\Rightarrow (x \leq y) \vee (x \geq y) \\ &\Rightarrow (x \leq y) \vee (y \leq x) \\ &\Rightarrow (x \preceq y) \vee (y \preceq x) \\ &\Rightarrow \preceq \textit{ örgündür.} \end{aligned}$$

2. $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde tanımlı,

$$\beta = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3), (2,3)\}$$

bağıntısının bir tam sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz ve grafiğini çiziniz.

Çözüm:

(a) β bağıntısı, köşegeni içerdiği için yansımalıdır.

(b) Köşegen dışında, köşegene göre simetrik olan noktalar içermediğinden, antisimetriktir.

(c) $x, y, z \in \beta$ ise,

$$((x,y) \in \beta) \wedge ((y,z) \in \beta) \Rightarrow (x,z) \in \beta$$

olduğunu, her bir öğe çifti için tek tek görebiliriz.

(d) Kümeye ait her öğe çifti mukayese edilebilmektedir.

O halde, β bir tam sıralama bağıntısıdır. Bağıntının grafiği yukarıda çizilmiştir.

Sıralama bağıntılarının grafiklerinin, köşegenin yalnız bir tarafında kaldığına dikkat ediniz.

3.

$$\beta = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,c)\}$$

bağıntısının türünü söyleyiniz. Grafiğini çiziniz. *Çözüm:* Bağıntı $A=$ { a,b,c } kümesi üzerinde tanımlıdır. Yansımalı, antisimetrik, geçişken ve örgün olduğu kolayca görülür. O halde, β bağıntısı bir *tam sıralama* bağıntısıdır.

4. **Sözlük Sıralaması**

Bilgisayarların, çok büyük verileri büyük bir hızla ve doğru olarak sıraladığını biliyorsunuz. Bilgisayarlar, sıralama işlemini yaparken, yukarıda söylediğimiz kurallara uyan programları kullanır. Bilgisayarla bir sözlükteki sözcükleri sıralamak istiyoruz. Programcının kullanacağı mantıksal kuralı, matematiksel simgelerle ifade ediniz.

Başka bir deyişle, bir sözlükte, sözcüklerinden hangisinin önce geleceğini belirleyen kuralı matematiksel simgelerle yazınız.

Çözüm: Alfabemizdeki harflerin

$$A \prec a \prec B \prec b \prec C \prec c, \prec D \prec d \prec \cdots \prec Y \prec y \prec Z \prec z$$

biçiminde sıralandığını biliyoruz. İki sözcüğün sırası şöyle belirlenir.

Alfabe sıralamasına göre,

(a) Önce, birinci harflere bakılır. Birinci harfi, önce gelen sözcük öndedir.

(b) Birinci harfleri eşitse, ikinci harflere bakılır. İkinci harfi önce gelen sözcük öndedir.

(c) Birinci ve ikinci harfleri karşılıklı eşitse, üçüncü harflere bakılır. Üçüncü harfi, önce gelen sözcük öndedir.

(d) Birinci, ikinci ve üçüncü harfleri karşılıklı eşitse, dördüncü harflere bakılır. Dördüncü harfi, önce gelen sözcük öndedir.

(e) Eşit olmayan harfler ortaya çıkana kadar, benzer işleme devam edilir.

(f) Birisinin harf sayısı bitene kadar, harflerin eşitliği devam ederse, harf sayısı daha az olan sözcük öndedir.

Örneğin, "*karakış*" ve "*kardeş*" sözcüklerini düşünelim. İlk üç harfleri eşit olduğundan, dördüncü harflere bakılır.

$$a \prec d \Rightarrow \textit{karakış} \prec \textit{kardeş}$$

olacaktır.

Şimdi, bunu bir kural olarak, matematiksel sembollerle yazalım.

$$\begin{aligned} x \preceq y \quad \Leftrightarrow \quad & (a_1 \prec b_1) \vee \\ & [(a_1 = b_1) \wedge (a_2 \prec b_2)] \vee \\ & [(a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2) \wedge (a_3 \prec b_3)] \vee \\ & [(a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2) \wedge (a_3 = b_3) \wedge (a_4 \prec b_4)] \vee \\ & \ldots \\ & [(a_1 = b_1) \wedge (a_2 = b_2) \wedge \cdots \wedge (a_{n-1} = b_{n-1}) \wedge (a_n \prec b_n)] \end{aligned}$$

9.5 ALIŞTIRMALAR

1. $A = \{3, 5, 6, 10, 12\}$ kümesi üzerinde tanımlı,

$$\beta = \{(3,3), (3,6), (3,12), (5,5), (5,10), (6,6), (6,12), (10,10)\}$$

bağıntısı,

(a) denklik bağıntısı mıdır?
(b) kısmî sıralama bağıntısı mıdır?
(c) bir tam sıralama bağıntısı mıdır?

Nedenleriyle açıklayınız.

2. $B = \{3, 5, 6, 7, 8, 12\}$ kümesi üzerinde tanımlı $\beta = \{(x, y) | x \leq y\}$ bağıntısı,

(a) denklik bağıntısı mıdır?
(b) kısmî sıralama bağıntısı mıdır?
(c) tam sıralama bağıntısı mıdır?

Nedenleriyle açıklayınız.

3. $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ kümesi üzerinde $\beta = \{(x, y) \mid x|y \}$ bağıntısı,

(a) denklik bağıntısı mıdır?
(b) kısmî sıralama bağıntısı mıdır?
(c) bir tam sıralama bağıntısı mıdır?

Nedenleriyle açıklayınız.

4. $A = \{0, 1, 2, 4, 6\}$ kümesinde tanımlı aşağıdaki bağıntıların türlerini belirtiniz.

(a) $\beta_1 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(4,4),(6,6),(2,4)\}$

(b) $\beta_2 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(4,4),(2,6),(6,4)\}$

(c) $\beta_3 = \{(1,1),(2,2),(4,4),(6,6),(4,6),(6,4)\}$

(d) $\beta_4 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(4,4),(6,6)\}$

5. $D = \{2,4,12,24\}$ kümesi üzerinde $\beta = \{(x,y) \mid x|y\ \}$ bağıntısı,

   (a) denklik bağıntısı mıdır?

   (b) kısmî sıralama bağıntısı mıdır?

   (c) bir tam sıralama bağıntısı mıdır?

   Nedenleriyle açıklayınız.

6. Üzerinde uzunluk tanımlı bir küme üzerinde *"daha kısa değildir"* bağıntısının, bir tam sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz.(Yol Gösterme: Küme üzerinde, "$x \succeq y \Leftrightarrow x,\ y$ *den kısa değildir*" bağıntısını tanımlayınız.

7. Bir kentte yaşayan insanlar kümesi üzerinde,

$$\beta = \{(x,y) \mid x,\ y \textit{ nin ablasıdır}\}$$

   bağıntısı,

   (a) denklik bağıntısı mıdır?

   (b) kısmî sıralama bağıntısı mıdır?

   (c) bir tam sıralama bağıntısı mıdır?

   Nedenleriyle açıklayınız.

8. $A = \{1,2,3,5,7\}$ kümesinde tanımlı $\beta = \{(x,y) : x \mid y\}$ bağıntısının türünü belirtiniz.

9. Bir A kümesi üzerinde tanımlı bir β bağıntısı veriliyor.

   (a) β bir kısmî sıralama bağıntısı ise β^{-1} de bir kısmî sıralama bağıntısı olur mu? Neden?

   (b) β bir tam sıralama bağıntısı ise β^{-1} de bir tam sıralama bağıntısı olur mu? Neden?

10. A nın bir has alt kümesinde tanımlı bir tam sıralama bağıntısı, A üzerinde de bir tam sıralama bağıntısı olur mu? Neden?

11. Bir küme üzerinde tanımlı iki kısmî sıralama bağıntısının arakesiti de bir kısmî sıralama bağıtısı mıdır? Neden?