Bölüm 10

FONKSİYONLAR

10.1 FONKSİYON KAVRAMI

Fonksiyon kavramı, yalnız klasik analizin değil çağdaş bilim ve tekniğin çok önemli araçlarından birisidir. Bu nedenle, bu bölümde fonksiyon kavramını ayrıntılarıyla olarak inceliyeeeğiz.

Fonksiyon, bağıntının özel bir türüdür.

Tanım 10.1.1. Boş olmayan X ve Y kümeleri ile bir $f \subset X \times Y$ bağıntısı verilsin. Her $x \in X$ için $(x, y) \in f$ olan bir ve yalnızca bir tane $y \in Y$ ögesi varsa, f bağıntısına, *X den Y ye bir fonksiyondur*, denilir.

Fonksiyonlar, genellikle, $f, g, h, ...$ gibi küçük harflerle gösterilir.

10.1.1 Temel Kavramlar

Bir f bağıntısının fonksiyon olduğunu belirtmek için, $f \subset X \times Y$ yerine

$$f : X \to Y \quad \text{ya da} \quad X \xrightarrow{f} Y \tag{10.1}$$

simgeleri ve

$$(x, y) \in f, \quad xfy$$

yerine,

$$y = f(x)\ , \quad f : x \to y\ , \qquad x \xrightarrow{f} y$$

simgelerinden birisi kullanılır. Bu derste, çoğunlukla,

$$y = f(x) \tag{2}$$

simgesini kullanacağız. Bu simgeler, x öğesinin, f bağıntısıyla, y ye eşlendiğini belirtir.

Çeşitli kaynaklarda fonksiyon terimi yerine *dönüşüm, transformasyon, gönderim, resmetme (mapping)* gibi eşanlamlı terimler kullanılır.

$f : X \to Y$ fonksiyonu için;
X kümesine, *tanım kümesi*,
Y kümesine, *değer kümesi,*
x öğesine, *bağımsız değişken*,
y öğesine, *bağımlı değişken (görüntü, resim)* ,

Tanım 10.1.2. $A \subset X$ için $f(A) = \{y \mid y = f(x),\ x \in A\ \} \subset Y$ kümesine, A nın f altındaki *görüntüsü*, A kümesine ise f nin *ön görüntüsü*, denilir.

$f : X \to Y$ fonksiyonunun belirli olması için, $y = f(x)$ bağıntısının verilmiş olması gerekir. Bunun verilmesi demek, $x \in X$ öğesinin f fonksiyonu altında hangi $y \in Y$ öğesine eşlendiğinin belirli kılınması demektir.
Örnek
$X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ve $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$ olmak üzere, $f : X \to Y$ fonksiyonunu $y = f(x) = x^2$ bağıntısı ile tanımlayalım.

Verilen f bağıntısı (kuralı), $x \to x^2$ dir; yani, x değişkeni, f altında x^2 ye eşlenecektir.

X tanım kümesinin, f altındaki görüntüsü, $f(X) = \{0, 1, 4\}$ kümesidir.

Görüldüğü gibi, tanım kümesinin görüntüsü bütün değer kümesini örtmeyebilir.

Fonksiyon tanımını, simgelerle ifade etmek uygun olacaktır.

Teorem 10.1.1. *Boş olmayan X ve Y kümeleri ile bir $f \subset X \times Y$ bağıntısı verilsin.* f nin bir fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul, aşağıdaki iki özeliğin sağlanmasıdır.

F1. Her $x \in X$ öğesinin Y içinde bir görüntüsü vardır.
F2. Her $x \in X$ öğesinin Y içinde ancak bir tane görüntüsü vardır.

Bu iki özelik, fonksiyonu belirleyen niteliklerdir. O nedenle, bunları, matematiksel simgelerle ifade etmek uygun olacaktır. Çünkü, bir çok problemin çözümünde, sözlü ifadeler yerine, matematiksel simgeleri kullanacağız.

Aşağıdaki ifade çiftleri, fonksiyon tanımına denktirler:
$f1.\quad (x \in X) \Rightarrow \exists y(y \in Y)(y = f(x))$
$f2.\quad (x_1 = x_2) \Rightarrow (y_1 = y_2)$
ya da, tanım ve değer kümelerinin apaçık belli olduğu zamanlarda,
$F1.\quad \forall x \exists y(y = f(x))$
$F2.\quad (y_1 \neq y_2) \Rightarrow (x_1 \neq x_2)$
yazılabilir.

10.1.2 Fonksiyonun Grafiği

Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu bir bağıntıdır. Bu bağıntının grafiği, fonksiyonun da grafiğidir.

f nin grafiğini, $graf(f)$ ya da G_f simgesiyle göstereceğiz.

Bu derste ele alacağımız fonksiyonlar, çoğunlukla, gerçek sayıların bir alt kümesinden gerçek sayılara tanımlı olacaktır. Dolayısıyla, bu fonksiyonların grafikleri, analitik düzlemde yer alacaktır.

Bir fonksiyonun belirli olması demek, tanım bölgesinin, değer bölgesinin ve eşleme kuralının bilinmesi demektir; yani,

$$f : X \to Y, \quad y = f(x)$$

nin bilinmesi demektir.

Bazan, fonksiyon verilirken, yalnızca $y = f(x)$ eşleme bağıntısı (kuralı) verilir; tanım ve değer bölgesi belirtilmez. Bu durumlarda, fonksiyonun X tanım bölgesi $y = f(x)$ bağıntısını anlamlı kılan bütün x gerçek sayılarıdır. Y değer bölgesi olarak bütün $\mathbb{R}$ gerçek sayılar kümesi alınabileceği gibi, $Y = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$ kümesi de alınabilir. Pratikte, değer bölgesini mümkün olduğunca küçük seçmek kolaylık sağlayabilir.

Bağıntılarda söylediğimiz gibi, $f : X \to Y, \quad y = f(x)$ fonksiyonu tanımlandığında, bunun grafiği kesinkes belirli olur.

Tersine olarak, grafiği verilen fonksiyon da kesinkes belirlidir. Bu nedenle, yeri geldiğinde, f ile $graf(f)$ simgelerini eş anlanda kullanabiliriz.

$f : X \to Y, \quad y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği,

$$graf(f) = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$$

kümesidir. Tabii,

$$graf(f) \subset X \times Y$$

dır. Grafik kavramı, bağıntılarda incelendiği için, bu kesimi, aşağıdaki özeliği söyleyerek kapatabiliriz.

Önerme 10.1.1. Bir fonksiyonun analitik düzlemdeki grafiği, düşey doğrularla en çok birer noktada kesişir.

İSPAT: X kümesinden Y kümesine tanımlı f bağıntısının grafiğini G_f ile gösterirsek, bağıntıyı, simgesel olarak $(f = (X, Y, G_f)$ sıralı üçlüsü ile gösteriyoruz. Bu gösterimler altında, yukarıdakilere eşdeğer olan şu özeliği söyleyebiliriz.

Teorem 10.1.2. *$(f = (X, Y, G_f)$ bağıntısının bir fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşullar şunlardır:*

(i) $izd_1(G_f) = proj_1(G_f) = \pi_1(G_f) = X$

(ii) $(x, y_1) \in G_f \wedge (x, y_2) \in G_f \Rightarrow y_1 = y_2$

Teorem 10.1.3. *$f : X \to Y$ fonksiyonu ile X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $\{A_\imath \mid \imath \in I\}$ ailesi verildiğinde aşağıdaki bağıntılar sağlanır:*

$$f\left(\bigcup_{\imath \in I} A_\imath\right) = \bigcup_{\imath \in I} f(A_\imath) \tag{10.2}$$

$$f\left(\bigcap_{\imath \in I} A_\imath\right) \subset \bigcap_{\imath \in I} f(A_\imath) \tag{10.3}$$

İSPAT: Aşağıdaki özeliklerden çıkar:

$$
\begin{aligned}
y \in f\left(\bigcup_{\imath\in I} A_\imath\right) &\Leftrightarrow (\exists x \in \bigcup_{\imath\in I} A_\imath : y = f(x)\\
&\Leftrightarrow (\exists j \in I)(\exists x \in A_j) : y = f(x)\\
&\Leftrightarrow (\exists j \in I) : y \in f(A_j)\\
&\Leftrightarrow y \in \bigcup_{\imath\in I} f(A_\imath)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y \in f\left(\bigcap_{\imath\in I} A_\imath\right) &\Rightarrow (\exists x \in \bigcap_{\imath\in I} A_\imath : y = f(x)\\
&\Rightarrow (\exists x \forall \imath (x \in A_\imath) \wedge y = f(x)\\
&\Rightarrow (\forall \imath \in I) y \in f(A_\imath)\\
&\Rightarrow y \in \bigcap_{\imath\in I} f(A_\imath)
\end{aligned}
$$

Uyarı 10.1.1. Teoremin ikinci bağıntısının eşitlik değil, kapsama bağıntısı olduğuna dikkat ediniz. Bu bağıntıda eşitlik olmadığını bir karşıt örnekle ispatlayabiliriz.

$$X = \{a, b, c\}, \quad Y = \{s, t\}, \quad A = \{a, b\}, \quad B = \{b, c\}$$

olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım:

$$f(x) = \begin{cases} s, & x = a \\ t, & x = b \\ s, & x = c \end{cases}$$

Buna göre, $f(A \cap B) = \{y\}$ olduğu halde $f(A) \cap f(B) = \{s, t\}$ olur; yani $f(A \cap B)\{y\} \neq f(A) \cap f(B)$ dir.

10.1.3 Uygulamalar

1. $X = \{1, 2, 5, 9\}$ ve $Y = \{a, b, c, d, e\}$ veriliyor. Aşağıdaki bağıntılardan hangileri fonksiyondur? Nedenleriyle açıklayınız.

   (a) $\beta_1 = \{(1, a), (2, b), (5, c), (9, d)\}$

   (b) $\beta_2 = \{(1, a), (2, b), (5, c), (5, d), (9, b), (9, d)\}$

   (c) $\beta_3 = \{(1, b), (5, a), (9, d)\}$

   (d) $\beta_4 = \{(1, d), (2, d), (5, d), (9, d)\}$

   (e) $\beta_5 = \{(1, c), (1, d), (2, b), (5, a), (5, c), (9, a)\}$

2. Yukarıdaki bağıntıların herbirisinin grafiğini çiziniz. Fonksiyon olanların grafiklerinin, düşey doğrularla ençok bir noktada kesiştiğini görünüz.

3. $X = \{-2, -1, 0, 3, 5\}$ ve $Y = \{-10, -7, -5, -3, 1, 2, 3, 4, 10\}$ kümeleri ile $f : X \to Y, \quad f(x) = 2x - 3$ fonksiyonu veriliyor.

   (a) f fonksiyonunun tanım bölgesini yazınız.

   (b) f fonksiyonunun değer bölgesini yazınız.

   (c) -1 öğesinin, f altındaki görüntüsünü yazınız.

   (d) $A = \{-1, 0, 5\}$ kümesinin, f altındaki görüntüsünü yazınız.

   (e) X kümesinin, f altındaki görüntüsünü yazınız.

4. $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ kümeleri veriliyor. X kümesinden Y kümesine tanımlanan

$$\beta = \{(x, y) \mid y = x + 1\}$$

   bağıntısının grafiğini çiziniz. Bir fonksiyon olup olmadığını inceleyiniz.

5. $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ veriliyor.

   (a) f nin grafiğini çiziniz.

   (b) f nin bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

   (c) f nin tanım bölgesini yazınız.

   (d) f nin değer bölgesini yazınız.

   (e) Tanım bölgesinin, f altındaki görüntüsünü yazınız.

6. $f = \{(-2, -1), (-1, -1), (0, 1), (1, 1), (2, 3)\}$ bağıntısı veriliyor.

   (a) f nin grafiğini çiziniz.

   (b) Grafiği kullanarak, f nin bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

   (c) f nin X tanım bölgesini yazınız.

   (d) f nin Y değer bölgesini yazınız.

   (e) $n(f)$ ile $n(X)$ nicelik sayılarını bulunuz.

7. $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{u, v, x, y, z\}$ kümeleri veriliyor. Aşağıdaki bağıntıların grafiklerini çiziniz. Hangilerinin fonksiyon olduğunu belirleyiniz.

   (a) $f = \{(1, x), (2, x), (2, y), (4, z)\}$

   (b) $g = \{(1, y), (2, y), (3, t), (4, z)\}$

   (c) $h = \{(1, y), (2, z), (3, x), (4, t)\}$

   (d) $k = \{(1, y), (2, y), (3, y), (4, y)\}$

8. Yukarıdaki fonksiyonların ok diyagramlarını çiziniz.

9. Ok diyagramı verilen fonksiyonu, *tanım bölgesini, değer bölgesini ve $y = f(x)$ eşleme kuralını belirleyerek,* tanımlayınız.

10. Aşağıdaki fonksiyonların tanım ve değer bölgelerini bulunuz.

    (a) $y = -2x + 5$

    (b) $y = \frac{1}{x-1}$

    (c) $y = x^2$

    (d) $y = |x|$

    (e) $y = \sqrt{x}$

11. Her fonksiyonun bir bağıntı olduğunu, ama her bağıntının fonksiyon olmadığını gösteren örnekler veriniz.

10.2 FONKSİYON TÜRLERİ

Eşit Fonksiyonlar

Her kümede olduğu gibi, fonksiyonlardan oluşan bir küme üzerinde eşitlik kavramı vardır.

Tanım 10.2.1. *Tanım kümeleri ve tanım kümelerine ait her noktadaki görüntüleri aynı olan iki fonksiyon eşittir.*

Bunu, simgelerle yazarsak, şöyle diyebiliriz:

X ve Y boş olmayan iki küme ve $f : X \to Y_1$, $g : X \to Y_2$ iki fonksiyon olsun.

$$f = g \iff [\forall x(x \in X) \Rightarrow f(x) = g(x)] \tag{10.4}$$

oluyorsa, *f ile g birbirine eşittir,* denilir. $f = g$ eşitliği yerine, bazan

$$f \equiv g \tag{10.5}$$

biçiminde eşdeğerlik simgesi yazılır. Bu eşitliğin tanımında, fonksiyonların Y_1 ve Y_2 değer bölgelerinin eşit olması koşulu gerekli değildir; çünkü, görüntü kümeleri eşittir: $f(X) = g(X)$. İstenirse, ortak değer bölgesi olarak, ortak görüntü kümeleri ya da $= Y_1 \cap Y_2$ seçilebilir. Bu seçim, fonksiyonların niteliklerinde bir değişiklik yapmayacaktır.

Örnek $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y_1 = \{-1, 0, 1, 2\}$, $Y_2 = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, \}$ kümeleri ile $f : X \to Y_1$, $f(x) = x$ ve $g : X \to Y_2$, $g(x) = x^3$ fonksiyonlarının eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

a. Tanım bölgeleri eşittir.

b. Tanım bölgelerine ait noktalarda, fonksiyonların aldığı değerler de, aşağıda görüldüğü gibi, karşılıklı olarak birbirlerine eşittir.

$f(-1) = -1 \quad f(0) = 0 \quad f(1) = 1$
$g(-1) = -1 \quad g(0) = 0 \quad g(1) = 1$

O halde, $f = g$ dir. İstersek, her iki fonksiyonun tanım bölgesi olarak, ortak görüntü kümesi olan $Y = \{-1, 0, 1\}$ kümesini alabiliriz. Bu seçim, fonksiyonların niteliğini değiştirmez. Ama, tanım bölgelerini değiştirirsek, fonksiyonların nitelikleri değişir. Örneğin, f nin tanım bölgesine 2 noktasını katarsak, fonksiyonların eşitliği bozulur: $f \neq g$.

İçine Fonksiyon

Görüntü kümesi, değer bölgesinin bir has alt kümesi olduğunda, fonksiyon *içine bir fonksiyon*'dur. Bunu simgelerle ifade edersek,

$$(f : X \to Y) \ \wedge \ (f(X) \neq Y) \tag{10.6}$$

ise, f foksiyonu X *kümesinden* Y *kümesi içine bir fonksiyondur,* diyeceğiz.

Örten Fonksiyon

Görüntü kümesi, değer bölgesine eşit olduğunda, fonksiyon *örten bir fonksiyon*'dur. Bunu simgelerle ifade edersek,

$$f : X \to Y \text{ için, } f(X) = Y \tag{10.7}$$

ise, f foksiyonu X *kümesinden* Y *kümesi üzerine (örten) bir fonksiyondur,* diyeceğiz.

Bire-bir Fonksiyon [bb]

Tanım bölgesindeki farklı öğelere eşlenen fonksiyon değerleri de farklı ise, fonksiyon *bire-bir (bijective) fonksiyon*'dur.

Bunu simgelerle ifade edersek,

$$f : X \to Y \text{ için, } (x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \tag{10.8}$$

ise, f foksiyonu X *kümesinden* Y *kümesine tanımlı bire-bir (bb) fonksiyondur,* diyeceğiz.

Bire-bir-içine fonksiyon [bbi]

Bire-bir ve içine (bbi) olma niteliklerine sahip fonksiyondur.

Bire-bir-örten Fonksiyon [bbö]

Bire bir ve örten olma niteliklerine sahip fonksiyondur (surjective).

$f : X \to Y$ fonksiyonu bbö ise X ile Y kümelerinin öğeleri arasında *bire-bir eşleşme* vardır. Bunu, kısaca, X ile Y kümeleri *bire-bir eşleşirler* diye belirteceğiz.

Sabit Fonksiyon

Görüntü kümesi bir tek noktadan oluşan fonksiyon.

Bunu simgelerle ifade edersek,

$$f : X \to Y \quad \text{için} \quad \exists^* c(c \in Y)(x \in X \Rightarrow f(x) = c) \tag{10.9}$$

ise, f foksiyonu X *kümesinden* $\{c\}$ *kümesi üzerine sabit bir fonksiyondur,* diyeceğiz.

Sıfır Fonksiyon

$Y = \mathbb{R}$ ya da $Y = \mathbb{C}$ olmak üzere, görüntü kümesi $f(X) = \{0\}$ olan $f : X \to Y$ sabit sabit fonksiyonu.

Bunu simgelerle ifade edersek, $f : X \to Y$ için

$$f \equiv 0 \Longleftrightarrow [\forall x(x \in X) \Rightarrow f(x) = 0)] \tag{10.10}$$

ise, f foksiyonu X *kümesinden* $\{0\}$ *kümesi üzerine bir sıfır fonksiyondur,* diyeceğiz.

Birim (özdeşlik) Fonksiyonu

Tanım bölgesindeki her öğeyi kendisine eşleyen fonksiyon.

Bunu simgelerle ifade edersek, $X \subset Y$ olmak üzere,

$$I : X \to Y \text{ için}, \ (x \in X \Rightarrow I(x) = x)$$

ise, f foksiyonu X *kümesinden* Y *kümesi içine bir gömme (özdeşlik, birim) fonksiyonudur,* diyeceğiz. $X \subset Y$ olduğunda *gömme* terimini; $X = Y$ olduğunda ise, çoğunlukla, *özdeşlik* ya da *birim* terimini kullanırız.

Kısıtlanmış Fonksiyon

$f : X \to Y$ fonksiyonu ile $A \subset X$ alt kümesi verilsin.

$$\forall x(x \in A) \Rightarrow f_{|_A}(x) = f(x) \tag{10.11}$$

diye tanımlanan $f_{|_A} : X \to Y$ fonksiyonu.

Gömme Fonksiyonu

$A \subset X$ olmak üzere

$$\forall x(x \in A) \Rightarrow g_A(x) = x \tag{10.12}$$

koşulunu sağlayan $g_A : A \to X$ fonksiyonu.

Hemen görüldüğü gibi, $I : X \to X$ birim fonksiyonunun $A \subset X$ alt kümesine $I_{|_A}$ kısıtı *gömme (embedding) fonksiyonudur.* Gömme fonksiyonları, özellikle X üzerinde bir matematiksel yapı var olduğunda işlevsellik kazanırlar.

Karakteristik Fonksiyon

Herhangi bir X kümesinden $\{0,1\}$ kümesine tanımlı olan

$$\chi_A = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in A' \end{cases} \tag{10.13}$$

$\chi_A \to \{0,1\}$ fonksiyonuna A nın *karakteristik (belirtgen)* fonksiyonu denilir.

Tanım 10.2.2. Y kümesinden X kümesine tanımlı olan bütün fonksiyonların kümesini X^Y simgesiyle göstereceğiz.

Simgesel olarak

$$X^Y = \{f \mid f : Y \to X\} \tag{10.14}$$

dir.

Örnekler

1. $X = \{0,1,2,3\}$ kümesinden $Y = \{-7,-4,1,6,11,15\}$ kümesine tanımlı olan $f(x) = 5x - 4$ fonksiyonu veriliyor. $f(X) = \{-4,1,6,11\}$ görüntü kümesi Y değer bölgesinin bir has alt kümesi olduğundan, f içine bir fonksiyondur.

   Bu fonksiyon, aynı zamanda, bire birdir. Dolayısıyla, *bire bir içine* bir fonksiyondur.

2. $X = \{0,1,2,3\}$ kümesinden $Y = \{-4,1,6,11\}$ kümesine tanımlı olan $y = 5x-4$ fonksiyonu örten bir fonksiyondur; çünkü $f(X) = \{-4,1,6,11\}$ görüntü kümesi Y değer bölgesine eşittir.

   Bu fonksiyon, aynı zamanda, bire birdir. Dolayısıyla, *bire bir örten* bir fonksiyondur. Buradan anlaşıldığı gibi, *bire bir içine* bir fonksiyonun değer bölgesini görüntü kümesine daraltarak örten bir fonksiyon elde edebiliriz. Bu işlem, fonksiyonun niteliğini değiştirmez.

3. $X = \{-2,-1,0,1,2\}$, olmak üzere,

   $$f : X \to X, \quad f(x) = x$$

   fonksiyonu, özdeşlik (birim) fonksiyondur.

4. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesine tanımlı olan

   $$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad f(x) = x$$

   fonksiyonu, bir gömme fonksiyonudur. Her r doğal sayısının $\frac{r}{1}$ biçiminde bir rasyonel sayı olarak algılanmasını sağlar.

5. $X = [2, 3)$ ve $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere,

$$f^+ : X \to Y, \quad f^+(x) = (x \text{ sayısının tam kısmı})$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon, $[2, 3)$ aralığındaki her x gerçek sayısını $\{2\}$ kümesi üzerine resmeder: $(x \in X \Rightarrow f^+(x) = 2)$. Öyleyse, f^+, sabit bir fonsiyondur.

6. $X = (-1, 0]$ ve $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere,

$$f_- : X \to Y, \; f_-(x) = k, \; [(k \in \mathbb{Z}) \wedge (x \leq k < x + 1)]$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon, $(-1, 0]$ aralığındaki her x gerçek sayısını $\{0\}$ kümesi üzerine resmeder:

$$(x \in X \Rightarrow f_-(x) = 0$$

Öyleyse, f_-, bir sıfır fonsiyondur.

10.3 ALIŞTIRMALAR

1. $f : \{-1, 1, 2, 5\} \to \{-5, -1, 1, 2, 5, 6\}$ fonsiyonu $y = f(x) = x$ bağıntısı ile veriliyor. f nin türünü belirtiniz.

2. $f(x) = 3x - 1$ bağıntısı ile tanımlanan $f : \{-1, 0, 1, 3\} \to \{-4, -1, 2, 8\}$ fonksiyonunun türünü belirtiniz.

3. $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{a, b, c, d\}$ veriliyor. $X \times Y$ nin alt kümesi olan aşağıdaki bağıntıların türlerini belirtiniz.

   (a) $\beta_1 = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, a)\}$
   (b) $\beta_2 = \{(1, a), (2, c), (3, b)\}$
   (c) $\beta_3 = \{(1, b), (2, c), (3, a), (4, b), (3, c)\}$
   (d) $\beta_4 = \{(1, b), (2, d), (3, c), (4, c)\}$
   (e) $\beta_5 = \{(1, c), (2, a), (3, b), (4, d)\}$

4. $f(x) = x^2 + 1$ bağıntısı ile tanımlanan $f : \{-1, 2, 3\} \to \{-3, 1, 2, 5, 10\}$ fonsiyonunun türünü belirtiniz.

5. $f(x) = 2x^2 - 1$ bağıntısı ile tanımlı $f : \{-3, -1, 0\} \to \{-3, -1, 0, 1, 2, 17\}$ fonsiyonunun türünü belirtiniz.

6. $f(x) = x^2 + 3$ bağıntısı bir fonksiyon tanımlıyor mu? Neden? Tanımlıyorsa, tanım bölgesini ve değer bölgesini belirleyiniz

7. Aşağıdaki bağıntıların tanımlı olduğu kartezyen çarpımları bulunuz. Bağıntıların grafiklerini çiziniz. Türlerini belirtiniz.

   $\beta_1 = \{(a,1),(b,2),(c,3)\}$

   $\beta_2 = \{(a,1),(a,2),(b,3),(c,3),(d,3)\}$

   $\beta_3 = \{(a,1),(b,1),(c,1),(d,1)\}$

   $\beta_4 = \{(1,a),(2,a),(3,a)$

   $\beta_5 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(2,t)$

8. $g(x) = 2x^2 + 1$ kuralı ile tanımlı $f : \{-2,-1,0,1\} \to \{-1,1,5\}$ fonksiyonunun türünü belirleyiniz. Grafiğini çiziniz.

9. Aşağıdaki bağıntıları belirleyiniz.

   (a) $\beta_1 = \{(a,x),(b,z),(c,z),(d,t)\}$
   (b) $\beta_2 = \{(a,y),(b,y),(c,y),(d,y)\}$
   (c) $\beta_3 = \{(a,z),(b,x),(c,y),(d,z)\}$
   (d) $\beta_4 = \{(y,a),(y,b),(y,c),(z,d)\}$
   (e) $\beta_5 = \{(x,a),(x,b),(x,c),(x,d)\}$

10. $f(x) = x - 3$ fonksiyonu ile $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ kümesi veriliyor. $f : A \to B$ nin bire bir ve örten olması için, B ne olmalıdır?

11. $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{x,y,z,t\}$ kümeleri veriliyor. A dan B ye tanımlı olan aşağıdaki türlerde fonksiyonlar belirleyiniz. Öğelerini listeleyiniz.

    (a) $f : A \to B$ içine fonksiyon,
    (b) $g : A \to B$ bire bir ve örten fonksiyon,
    (c) $h : A \to B$ sabit fonksiyon,
    (d) $s : A \to B$ sıfır fonksiyon,
    (e) $t : B \to A$ ters fonksiyon,

12. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu $f(x) = (a-3)x + 2 - b$ bağıntısı ile veriliyor. f nin bir özdeşlik fonksiyonu olması için, a ve b ne olmalıdır?

13. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu $f(x) = (a-5)x + 3 - b$ bağıntısı ile veriliyor. f nin sıfır fonksiyon olması için, a ve b ne olmalıdır?

14. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu $f(x) = (a-1)x + 4 + b$ bağıntısı ile veriliyor. f nin sabit bir fonksiyon olması için, a ve b ne olmalıdır?

15. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ bağıntısının bir fonksiyon belirleyip belirlemediğini saptayınız. Belirliyorsa, fonksiyonun tanım ve değer bölgelerini yazınız.

16. $A = \{a,b,c,d\}$ olmak üzere $f(x) = x$ kuralı ile tanımlı $f : A \to A$ fonksiyonunun türünü belirleyiniz. Grafiğini çiziniz.

17. $\natural(A) = n$ ve $\natural(B) = m$ ise, A kümesinden B kümesine kaç tane bire-bir fonksiyon vardır?

18. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \longmapsto f(x) = x^2$ fonksiyonu bbi midir. Neden?

19. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+; \quad x \longmapsto f(x) = |x - 1|$ fonksiyonu bbi midir. Neden?

20. $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}; \quad x \longmapsto f(x) = \ln x$ fonksiyonu bbi midir. Neden?

21. Doğal sayılar kümesinden gerçel sayılar kümesine bir bbi fonksiyonu tanımlayınız.

22. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine bir bbi fonksiyonu tanumlayınız.

23. $\mathbb{Z}$ den $\mathbb{Z}$ ye tanımlanan

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \text{ çift} \\ x + 4, & x \text{ tek} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

(a) f fonksiyonu bbö midir?

(b) f^{-1} ters bağıntısı bir fonksiyon mudur?

24. $\mathbb{R}$ den $\diagdown$ ye tanımlı olan

$$x\beta y \Leftrightarrow y = x^2$$

bağıntısının bir fonksiyon olmadığını gösteriniz. Bu bağıntının parabol diye adlandırılan grafiğini çiziniz. Bu bağıntıdan fonksiyon olan iki alt bağıntı çıkarınız.

25. $\mathbb{R}$ den $\diagdown$ ye tanımlı olan

$$x\beta y \Leftrightarrow 9x^2 + 4y^2 = 16$$

bağıntısının bir fonksiyon olmadığını gösteriniz. Bu bağıntının elips diye adlandırılan grafiğini çiziniz. Bu bağıntıdan fonksiyon olan iki alt bağıntı çıkarınız.

26. $f : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ ise

(a)
$$A \subset f^{-1} o f[A]$$

(b)
$$B = f o f^{-1}[B]$$

(c)
$$f[A \cap B] \subset f(A) \cap f(B)$$