4. DEVİRLİ ALT GRUPLAR

Tanım 4.1. M, bir G grubunun bir alt kümesi olsun. M yi kapsayan, G nin bütün alt gruplarının ara kesitine M nin ürettiği (doğurduğu) alt grup denir ve $<M>$ ile gösterilir. M nin elemanlarına da $<M>$ grubunun üreteçleri (doğurayları) denir.

Önerme 4.2 : G bir grup ve $M \subseteq G$ olsun. Bu takdirde

i) $M = \varnothing$ veya $M = \{e_G\}$ ise $<M> = \{e_G\}$ dir.

ii) $M \neq \varnothing$ ise, $<M> = \{ a_1^{n_1}.a_2^{n_2}...a_r^{n_r} : a_i \in M, r \in N, n_i \in Z, i = 1,2,...r\}$ dır.

İspat :

i) $\varnothing \subseteq \{e_G\}$ ve G nin her alt grubu e_G yi kapsadığından $\langle \emptyset \rangle = \{e_G\}$ dir. Ayrıca $M = \{e_G\}$ ise $<M> = \{e_G\}$ olduğu açıktır.

ii) $H = \{ a_1^{n_1}.a_2^{n_2}...a_r^{n_r} : a_i \in M, r \in N, n_i \in Z, i = 1,2,...r\}$ kümesinin G nin bir alt grubu olduğunu gösterelim: $a = a_1^{n_1}.a_2^{n_2}...a_r^{n_r}$ ve $b = b_1^{m_1}.b_2^{m_2}...b_s^{m_s}$ olmak üzere $a,b \in H$ için $ab^{-1} =$ $a_1^{n_1}.a_2^{n_2}...a_r^{n_r}\,.\,b_s^{-m_s}...b_2^{-m_2}b_1^{-m_1} \in H$ olduğundan $H < G$ dir.

$m \in M$ alalım. m yi kendinin bir kuvvet çarpımı olarak düşünerek yani H nin tanımından $r = 1$ ve $n_1 = 1$ alarak $m \in H$ bulunur. Şu halde $M \subseteq H$ dır. $H < G$ olduğundan, $<M> \subseteq H$ elde edilir.

Tersine $H \subseteq <M>$ kapsamasını gösterelim:

$a = a_1^{n_1}.a_2^{n_2}...a_r^{n_r} \in H$ alalım. $a_1, a_2, ..., a_r \in M \subseteq <M>$ ve $<M>$ bir grup olduğundan bu elemanların kuvvetleri ve bunların çarpımı da $<M>$ de kalır.

Şu halde $a = a_1^{n_1}.a_2^{n_2}...a_r^{n_r} \in <M>$, yani $H \subseteq <M>$ elde edilir. Sonuç olarak $H = <M>$ dir.

Uyarı: G toplamsal grup ve $\emptyset \neq M \subseteq G$ ise $<M> = \{n_1a_1 + \cdots + n_ra_r : r \epsilon N, n_i \epsilon Z, a_i \epsilon M\}$ dir.

Tanım 4.3 : Bir G grubu için, $G = <M>$ olacak şekilde bir $M \subseteq G$ alt kümesi bulunabiliyorsa, G ye M ile üretilmiş grup denir. Eğer M sonlu bir küme ise G ye sonlu üretilmiş grup, $M = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise G ye a ile üretilmiş devirli grup denir ve $G = <a>$ ile gösterilir.

Önerme 4.2 den G, a ile üretilmiş çarpımsal devirli grup ise $G = <a> = \{a^n : n \in Z\}$ ve G, a ile üretilmiş toplamsal devirli grup ise $G = \langle a \rangle = \{na : n \in Z\}$ olacağı açıktır.

Örnekler 4.4.

1) Z , 1 ile üretilmiş sonsuz devirli gruptur. Gerçekten,

$Z=<1>=<-1>$ olduğunu görebiliriz.

2) $G=\{1,i,-1,-i\}$ grubu i ile üretilmiş 4. mertebeden bir (sonlu) devirli gruptur.

3) $Z_m=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},...,\overline{m-1}\}$, $\overline{1}$ ile üretilmiş $m.$ mertebeden bir devirli gruptur.

4) $T=\{6,15\}\ \subseteq Z$ için $<T>=3Z$ dir. $(-1)12+15=3$ ve 6=2.3, 15=5.3 olduğundan $<T>=3Z$ dır.

5) Z de 5 in ürettiği grup $<5>=\{5n:n\in Z\}$ dir.

6) $(Q,+)$ bir devirli grup değildir.

Ispat. $(Q,+)$ bir devirli grup olsun. Şu halde $Q=\langle\frac{p}{p}\rangle$ ve $(p,q)=1$ olacak şekilde $\frac{p}{q}\in Q$ vardır. $\frac{p}{2q}\in Q$ olduğundan $\frac{p}{2q}=n\frac{p}{q}$ olacak şekilde $0\neq n\in Z$ vardır. Böylece $\frac{1}{2}\in Z$ çelişkisi elde edilir.

7) $(Z_3 x Z_4,\ +)$ yapısının bir devirli grup olduğunu gösterelim.

$\forall(a,b),(c,d)\in Z_3 x Z_4$ için $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ işlemine göre $(Z_3 x Z_4,\ +)$ nın bir grup olduğu açıktır.

Şimdi grubun devirli olup olmadığına bakalım. $(1,1)\in Z_3 x Z_4$ elemanını göz önüne alalım.

1(1,1)=(1,1) 4(1,1)=(1,0)
2(1,1)=(2,2) 5(1,1)=(2,1)
3(1,1)=(0,3) 6(1,1)=(0,2)
7 (1,1)=(1,3) 10(1,1)=(1,2)
8 (1,1)=(2,0) 11(1,1)=(2,2)
9(1,1)=(0,1) 12(1,1)=(0,0) olup $Z_3 x Z_4$=<(1,1)> olduğundan grup devirlidir.

8) $a,b\in Z$ olsun.

a) $aZ+bZ=\{ak+bd:k,d\in Z\}<Z$

b) a ve $b+7a$ elemanları $aZ+bZ$ yi üretir. Yani $aZ+bZ=<a,\ b+7a>$ dır.

Çözüm :

a) Açık.

b) $ak+bl \in aZ+bZ \Rightarrow ak+bl = a(k-7l)+(b+7a)l$ olduğundan

$aZ+bZ = < a, b+7a >$ dir.

Not 4.5. Pozitif n tamsayısı için $1 \leq a < n$ ve $(a,n)=1$ olan a tam sayıların sayısı $\phi(n)$ ile gösterilir ve buradaki fonksiyona Euler fonksiyonu denir.

Euler fonksiyonunun şu özellikleri vardır:

1) p asal ise $\phi(p) = p-1$

2) p asal ve $a \in N$ ise $\phi(p^a) = p^a - p^{a-1} = p^a(1-\frac{1}{p})$.

3) $(m,n)=1$ ise $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$

4) $m = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ ise $\phi(m) = \phi(p_1^{a_1}).\phi(p_2^{a_2})...\phi(p_r^{a_r}) = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}...p_r^{a_r}(1-\frac{1}{p_1})...(1-\frac{1}{p_r})$

Örnek 4.6. Z_{10}^* devirli gruptur. Z_{10}^* ın mertebesi $\phi(10) = \phi(2)\phi(5) = 4$ olan bir gruptur. Bu grupta $\overline{3} \in Z_{10}^*$ sınıfının mertebesi 4 tür. Gerçekten, $\overline{3}^2 = 9, \overline{3}^3 = 7, \overline{3}^4 = 1$. Yani $\overline{3}$ bir üreteçtir.

Not 4.7.

Euler Teoremi : $m \in Z$ olsun. $(a,m)=1$ olan $\forall a \in Z$ için $a^{\phi(m)} = 1(\mathrm{mod}\, m)$ veya $\overline{a}^{\phi(m)} = \overline{1}$.

Fermat Teoremi : Özel olarak $m = p$ asal sayı ise $p \nmid a$ *olacak şekilde* $\forall a \in Z$ için $a^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ dir.

Örnekler 4.8.

1) Z_{15}^* bir devirli grup değildir. $\forall \overline{a} \in Z_{15}^*$ için $\overline{a}^4 = \overline{1}$ olur. Halbuki, Z_{15}^* mertebesi $\phi(15) = \phi(3)\phi(5) = 8$ dir.

2) $n \geq 3$ olmak üzere A_n alterne grubu 3 uzunluğundaki devirler tarafından üretilmiştir.

İlk olarak A_n her elemanının 3-lü devirlilerin bir çarpımı olduğunu gösterelim. $f \in A_n$ olsun. $1 \leq i \leq r$ ve r çift tam sayı olmak üzere $f_1, f_2, \ldots, f_r$ transpozisyonları için $f = f_1 f_2 \ldots f_r$ olur. Herhangi (ab) transpozisyonu için

$$(ab) = (1a)(1b)(1a)$$

olduğundan m çift tam sayı olmak üzere $f = (1i_1)(1i_2)\dots(1i_m)$ elde ederiz. Fakat $(1i_1)(1i_2) = (1i_1i_2)$ olduğundan f lü devirlerin bir çarpımıdır.
Her üçlü devir çift permütasyon olduğundan her üçlü devir A_n grubunu bir elemanıdır. Yukarıda gösterdiğimiz gibi A_n grubunun her elemanı 3-lü devirlerin bir çarpımıdır. Böylece A_n grubu 3-lü devirler tarafından üretilmiştir.

Not 4.9. $G = \langle a \rangle$ olsun. a nın bütün pozitif kuvvetlerini göz önüne aldığımızda iki durum söz konusudur.

Durum 1) a nın bütün kuvvetleri birbirinden farklıdır. Şu halde, G sonsuz devirli gruptur.
Durum 2) a nın bazı kuvvetleri aynıdır. Eğer $r > s$ tamsayıları için $a^r = a^s$ ise kısaltma özeliğini kullanarak $a^{r-s} = e$ bulunur. Pozitif tamsayıların iyi sıralı oluşundan, $a^m = e$ olan en küçük pozitif tamsayı bulunabilir. Bu en küçük pozitif tamsayı t ise $G = \{a, a^2, \dots, a^t = e\}$ olur. Gerçekten $n \in Z$ olmak üzere $a^n \in G = \langle a \rangle$ alalım. n yi t ile kalanlı bölerek, $n = qt + r, 0 \le r < t, \exists q, r \in Z$ şeklinde yazabiliriz
$a^n = a^{qt}a^r = (a^t)^q a^r = ea^r = a^r$ olduğundan $a^n \in \{a, a^2, \dots, a^t = e\}$ yani
$G \subseteq \{a, a^2, a^3, \dots, a^t = e\}$ bulunur. $a \in G$ olduğundan ters kapsama da doğrudur.

Tanım 4.10. G bir grup ve $a \in G$ olsun. a nın ürettiği $\langle a \rangle$ devirli grubunun mertebesine a elemanının mertebesi denir ve $o(a)$ veya $|a|$ ile gösterilir. Şu halde $o(a)$, $a^n = e$ koşulunu sağlayan $n > 0$ tamsayılar arasında en küçük olanıdır.

Önerme 4.11. G bir grup, $a \in G$ ve $o(a) = n$ olsun. Şu halde $a^m = e \Leftrightarrow n|m$ dir.

İspat : $\Rightarrow$: $a^m = e$ olsun. m yi n ile kalanlı bölerek, $m = kn + r, 0 \le r < n$ olacak şekilde $k \in Z$ bulunabilir. $o(a) = n$ olduğundan, $a^n = e$ ve $e = a^m = (a^n)^k a^r = a^r$ bulunur. Fakat $0 < r < n$ ise $a^r = e$ olması n nin bu koşulu sağlayan en küçük pozitif tamsayı olması ile çelişir. Şu halde $r = 0$, yani $n|m$ olmalıdır.
$\Leftarrow$: $n|m$ olsun. $m = nk, k \in Z$ ise $a^m = (a^n)^k = e^k = e$ olur.

Önerme 4.12. $G = \langle a \rangle$, n. mertebeden bir devirli grup olsun. a^s nin G nin bir üreteci olması için gerek ve yeter koşul $(s, n) = 1$ olmasıdır.

İspat : $\Rightarrow$: a^s, G nin bir üreteci ise $G = \langle a \rangle = \langle a^s \rangle$ dir. $a \in \langle a^s \rangle \Rightarrow a = (a^s)^t, \exists t \in N$. Kısaltma özelliği kullanarak, $a^{st-1} = e$ ve Önerme 4.11 den $n|st-1$ bulunur. Şu halde, bir $y \in Z$ için $st - 1 = ny$ ve böylece $st - ny = 1$ olacağından $(s, n) = 1$ elde edilir.

$\Leftarrow: (s,n)=1$ olsun. Şu halde $xs+ny=1$ olacak şekilde $\exists x,y\in Z$. Böylece $a=(a^s)^x(a^n)^y=(a^s)^x\in\langle a^s\rangle$ olacağından $G=<a>\subseteq<a^s>$ dir. $a^s\in<a>$ olduğundan $<a^s>\subseteq<a>=G$ olduğu da açıktır. Böylece $G=<a^s>$ dır.

Önerme 4.13. $G=<a>$ bir sonsuz devirli grup ise üreteçleri a ve a^{-1} dir.

İspat : $a^s, G=<a>$ nın bir üreteci ise $(a^s)^x=a$ olacak şekilde $\exists x\in Z$. Buradan $<a>$ nin sonsuz devirli grup olması nedeniyle $sx=1$ yani $s=\mp1$ bulunur.

Önerme 4.14. Devirli bir grubun her alt grubu da devirlidir.

İspat : $G=<a>$ ve $H<G$ olsun. $H=\{e\}$ ise H nin e ile üretilen bir devirli grup olduğu açıktır.

$H\neq\{e\}$ ve $n\neq0$ tamsayısı için $a^n\in H$ olsun. $H<G$ olduğundan, $(a^n)^{-1}=a^{-n}\in H$ dır. Şu halde genelliği bozmadan $n>0$ olmak üzere $a^n\in H$ kabul ederiz. Pozitif tamsayılar iyi sıralı olduğundan $a^s\in H$ olacak şekilde en küçük pozitif tamsayı s olsun. Bu durumda $H=<a^s>$ olacağını gösterelim. $a^s\in H$ ve $H<G$ olduğundan $<a^s>\subseteq H$ dır.

Tersine bir $a^n\in H$ alalım. n yi s ile kalanlı bölerek $n=qs+r, 0\le r<s, \exists q,r\in Z$ şeklide yazalım. Şu halde

$a^n=(a^s)^q a^r$ ve böylece $a^r=a^n(a^s)^{-q}\in H$ olur. Fakat $0<r<s$ ve $a^r\in H$ olması s nin seçimi ile çelişir. Bu durumda $r=0$ ve bundan dolayı $n=qs$ bulunur. Buradan $a^n=(a^s)^q\in<a^s>$, yani $H\subseteq\langle a^s\rangle$ bulunur. Her iki kapsamadan da $H=<a^s>$ bulunur.

Önerme 4.15 $G=<a>$ bir sonsuz devirli grup ise alt grubu da bir sonsuz devirli gruptur.

İspat : Önerme 4.14 e göre devirli bir grubun her alt grubu da devirlidir. Şimdi sonsuz bir devirli grubun her alt grubunun da sonsuz olacağını gösterelim. $H<<a>$ olsun. Önerme 4.14 de $a^s\in H$ olan en küçük pozitif tamsayı s ise $H=<a^s>$ olduğunu göstermiştik. $<a>$ sonsuz bir devirli grup olduğundan, a nın bütün kuvvetleri dolayısıyla a^s nin bütün kuvvetleri farklıdır. Şu halde $H=<a^s>$ de bir sonsuz devirli gurp olur.

Önerme 4.16. G bir grup, $a\in G$ ve $o(a)=n$ olsun. $o(a^m)=\dfrac{n}{(m,n)}$ dır.

İspat : $a\in G$, $o(a)=n$ ve $(m,n)=d$ olsun. $m=dm'$ ve $n=dn'$ ise $(m',n')=1$ olur.

$o(a^m)=\dfrac{n}{(m,n)}=n'$ olduğunu gösterelim. $o(a^m)=k$ olsun.

$(a^m)^k = a^{mk} = e \Rightarrow o(a) = n | mk \Rightarrow n' / m'k$
ve $(n', m') = 1$ olduğundan $\acute{n} | k$ bulunur. Diğer taraftan $(a^m)^{\acute{n}} = a^{\acute{m}d\acute{n}} = (a^n)^{\acute{m}} = e \Rightarrow$ $o(a^m) = k | \acute{n}$ bulunur. Şu halde, $o(a^m) = k = n' = \dfrac{n}{(m,n)}$ dir.

Önerme 4.17. G mertebesi m olan sonlu devirli grup olsun. Şu halde G grubunun m nin her pozitif d böleni için mertebesi d olan tek bir alt grubu vardır.

İspat. $G = \langle a \rangle$ ve d, m nin bir pozitif böleni olsun. Şu halde $m = kd$ olacak şekilde $k \in Z$ vardır. Böylece $a^k \in G$ ve Önerme 4.16 dan $o(a^k) = \frac{o(a)}{(k,m)} = \frac{m}{k} = d$ elde edilir. $H = \langle a^k \rangle$ olsun. Böylece $|H| = o(a^k) = d$ elde edilir. Sonuç olarak mertebesi d olan bir grup elde etmiş olduk. Şimdi H nin tek olduğunu gösterelim.

K mertebesi d olan bir alt grup ve t de $a^t \in K$ olacak şekilde en küçük pozitif tam sayı olsun. Bundan dolayı $K = \langle a^t \rangle$ dir. K nın mertebesi d olduğundan $o(a^t) = d$ dir. Önerme 4.16 den $d = o(a^t) = \frac{m}{(t,m)}$ ve böylece $(t, m) = \frac{m}{d} = k$ elde ederiz. Bu ise k/t olduğunu ve böylece $t = kl$ olacak şekilde $l \in Z$ vardır. Bundan dolayı $a^t = a^{kl} = (a^k)^l \in H$ ve böylece $K \subseteq H$ elde ederiz. Fakat $|K| = |H|$ olduğundan ve H, K alt grupları sonlu olduğundan $H = K$ olur. Böylece mertebesi d olan tek bir alt grup vardır.

Örnekler 4.18.

1) $G = \langle x \rangle$ ve $|\langle x \rangle| = 30$ ise $\langle x \rangle$ in alt grupları şunlardır.

$\langle x^1 \rangle = \langle x \rangle = \{e, x, ..., x^{29}\}$

$\langle x^2 \rangle = \{e, x^2, ..., x^{28}\}$, $|\langle x^2 \rangle| = 15$

$\langle x^3 \rangle = \{e, x^3, ..., x^{27}\}$, $|\langle x^3 \rangle| = 10$

$\langle x^5 \rangle = \{e, x^5, ..., x^{25}\}$, $|\langle x^5 \rangle| = 6$

$\langle x^6 \rangle = \{e, x^6, ..., x^{24}\}$, $|\langle x^6 \rangle| = 5$

$\langle x^{10} \rangle = \{e, x^{10}, x^{20}\}$, $|\langle x^{10} \rangle| = 3$

$\langle x^{15} \rangle = \{e, x^{15}\}$, $|\langle x^{15} \rangle| = 2$

$\langle x^{30} \rangle = \langle e \rangle = \{e\}$, $|\langle x^{30} \rangle| = 1$

2) Z_{30} un tüm alt grupları şunlardır.

$\langle 0 \rangle = \{0\}$,	$\lvert\langle 0 \rangle\rvert = 1$
$\langle 1 \rangle = \{0, 1, \ldots, 29\}$,	$\lvert\langle 1 \rangle\rvert = 30$
$\langle 2 \rangle = \{0, 2, 4, \ldots, 28\}$,	$\lvert\langle 2 \rangle\rvert = 15$
$\langle 3 \rangle = \{0, 3, \ldots, 27\}$,	$\lvert\langle 3 \rangle\rvert = 10$
$\langle 5 \rangle = \{0, 5, \ldots, 25\}$,	$\lvert\langle 5 \rangle\rvert = 6$
$\langle 6 \rangle = \{0, 6, \ldots, 24\}$,	$\lvert\langle 6 \rangle\rvert = 5$
$\langle 10 \rangle = \{0, 10, 20\}$,	$\lvert\langle 10 \rangle\rvert = 3$
$\langle 15 \rangle = \{0, 15\}$,	$\lvert\langle 15 \rangle\rvert = 2$

3) $G=<a>$, 20. mertebeden bir devirli grup ise bütün üreteçlerini ve alt gruplarını bulalım.

$o(a)=20$ olduğundan $G=<a>$ nın üreteçleri sayısı $\phi(20)=\phi(2^2)\phi(5)=2.4=8$ tanedir. Bunlar $(r,20)=1$ ve $1\leq r\leq 20$ olmak üzere a^r lerdir. Yani
$G=<a>=<a^3>=<a^7>=<a^9>=<a^{11}>=<a^{13}>=<a^{17}>=<a^{19}>$

Alt gruplarının sayısı da 20= $2^2.5$ nin pozitif bölenlerinin sayısı yani $\phi(20)=2.3=6$ dır. $d|20$ olmak üzere, d. mertebeden alt grup $<a^{20/d}>$ ile belirlidir.

4) G bir grup, $H=<a>$ ve $K=<b>$ sırasıyla m. ve n. mertebeden alt grupları olmak üzere $(m,n)=1$ olsun. $H\times K$, mn mertebeden devirli bir gruptur.

Gerçekten, $|(a,b)|=d$ olsun. $(a,b)^{mn}=(a^{mn},b^{mn})=(e,e)$ olduğundan $d|mn$ dir. Aynı zamanda, $(e,e)=(a,b)^d=(a^d,b^d)$ olduğundan $a^d=e=b^d$ dir. Böylece $m|d$ ve $n|d$ den $mn|d$ elde edilir. Sonuç olarak $mn=d$ dir. $o(H\times K)=mn$ olduğundan (a,b) elemanı $H\times K$ grubunu üretir. Böylece $H\times K=<(a,b)>$ dir.

5) 4. örnekten $(m,n)=1$ ise $Z_m\times Z_n$ grubu devirlidir.

Örnek 4.19. $D_n=\langle x,y\colon x^n=y^2=e, xy=yx^{n-1}\rangle$ grubuna **Dihedral grup** denir. Şimdi $D_n=\{y^jx^i\colon 0\leq i<n, j=0,1\}$ olduğunu gösterelim :
$xy=yx^{n-1}$ olması $x^2y=xyx^{n-1}=yx^{2(n-1)}$ olmasını gerektirir. Bu şekilde devam edersek $i=0,1,2,\dots,n-1$ için $x^iy=yx^{i(n-1)}$ elde ederiz. Fakat $x^n=e$ olduğundan $0\leq k\leq n-1$ olmak üzere $x^iy=yx^{i(n-1)}=yx^{-i}=yx^k$ dir. Böylece
$D_n=\{e,x,x^2,\dots,x^{n-1},y,yx,\dots,yx^{n-1}\}=\{y^jx^i\colon 0\leq i<n, j=0,1\}$ olduğu görülür.

Tanım 4.20. $|a|=4$, $a^2=b^2$ ve $ba=a^3b$ ise G grubu a ve b tarafından üretiliyorsa (Yani $G=(a,b)$ ise) G ye **Quaternion grup** denir.

Örnek 4.21. T, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerinde 2×2 lik terslenebilir matrislerin bir kümesi olsun. T bilinen matris çarpımı altında bir gruptur. T grubunun $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}$ ile üretilmiş alt grubu G olsun. Şu halde $|A|=4$, $A^2=B^2$ ve $BA=A^3B$ olduğundan G nin bir Quaternion grup olduğu görülür.

Önerme 4.22. r uzunluğundaki bir devirin mertebesi r dir.

İspat : $f=(\,i_1i_2\dots i_r\,)$ yi r uzunluğundaki bir devir kabul edelim. $1\leq k,\ j\leq r$ için
$j+k\leq r$ ise $f^k(i_j)=i_{j+k}$

$j + k > r$ ise $f^k(i_j) = i_{j+k-r}$

dır. Buradan $f^r = e$ ve $1 \leq t < r$ için $f^t \neq e$ olduğu görülür. Bu durumda f nin mertebesi r dir.

Önerme 4.23. Bir $f \in S_n$ permütasyonunun mertebesi, ayrıldığı ayrık devirlerin uzunluklarının ekok dır.

İspat : f nin ayrık devirlere ayrılışı $f = c_1 c_2 \dots c_s$ olmak üzere c_i devirinin uzunluğu t_i ve $ekok(t_1, t_2, \dots, t_s) = m$ olsun. ayrık devirlerin çarpımı değişmeli olduğundan $f^m = c_1^m c_2^m \dots c_s^m$ dir $o(c_i) = t_i$ olduğundan $c_1{}^m = c_2^m = \cdots = c_s^m = e$ dir. Buradan $f^m = e$ dir.

Diğer taraftan f nin c_i deki sayılara kısıtlanışı c_i yi verdiğinden $f^n = e$ olması her $i = 1, 2, \dots s$ için $c_i^n = e$ olmasını gerektirir. Şu halde $t_i | n$ dir. Böylece $f^n = e$ olan en küçük pozitif tam sayının $ekok\,(t_1, \dots, t_s) = m$ olduğu görülür.

Örnek 4.24. f= (3 4)(1 2 5) $\Rightarrow o(f) = ekok(2,3) = 6$ ve

$g = (34)(1235) = (12435) \Rightarrow o(g) = 5$

SORULAR

1) $(Q - \{0\}, .)$ grubunun devirli olmadığını gösteriniz.

2) $(Q - \{0\}, .)$ çarpımsal grubunda $\langle \frac{1}{3} \rangle$ devirli alt grubunu belirleyiniz.

3) Devirli grupların değişmeli olduğunu gösteriniz.

4) Devirli olmayan sonlu gruba örnek veriniz.

5) Devirli olmayan sonsuz gruba örnek veriniz.

6) Mertebesi 3 olan grubun devirli olduğunu gösteriniz.

7) Yalnız bir üreteci olan gruba örnek veriniz.

8) Her öz alt grubu devirli olan grup devirli midir ? Neden ?

9) G bir grup ve $a \in G$ ise $\langle a \rangle = \langle a^{-1} \rangle$ olduğunu gösteriniz.

10) G bir grup ve $a,b \in G$ olsun. Şu halde $\langle a,b\rangle = \langle a,ab\rangle = \langle a^{-1},b^{-1}\rangle$ olduğunu gösteriniz.

11) G bir grup ve $a,b \in G$ ise $|a| = |bab^{-1}|$ olduğunu gösteriniz

12) Sıfırdan farklı kompleks sayıların çarpımsal alt kümesi $\mathbb{C}^*$ ın $\langle i\rangle$ devirli alt grubuna H diyelim. H nın elemanlarını ve mertebesini belirleyiniz.

13) Soru 7 deki H grubunun devirli alt grubu $\langle (1+i)/\sqrt{2}\rangle$ nin elemanlarını yazınız, mertebesini belirleyiniz.

14) Aşağıdaki grupların mertebelerini belirleyiniz.

(a) $\mathbb{Z}_{30}$ un 25 ile üretilen devirli alt grubu,

(b) $\mathbb{Z}_{42}$ un 30 ile üretilen devirli alt grubu.

15) Aşağıdaki grupların tüm alt gruplarının mertebelerini belirleyiniz.

(a) $\mathbb{Z}_6$

(b) $\mathbb{Z}_8$

(c) $\mathbb{Z}_{12}$

(d) $\mathbb{Z}_{17}$

(e) $\mathbb{Z}_{20}$

16)$(\mathbb{Z}_{40},+)$ ve $(\mathbb{Z}_{41}{}^{*},\cdot)$ gruplarında 5 elemanın mertebelerini bulunuz.

17) $\mathbb{Z}_{16}$ grubundaki tüm elemanların mertebelerini bulunuz.

18) 36. mertebeden devirli bir grubun tüm alt gruplarını ve üreteçlerini belirleyiniz.

19) $Z_2 \times Z_4$ grubunun mertebesi 4 olan alt gruplarını bulunuz.

20) $Z_4 \times Z_6$ grubunun $\{(2,4),(3,2)\}$ alt kümesinin ürettiği alt grubu belirleyiniz.

21) $(Z,+)$ grubunda $\langle \{4,6\} \rangle$ alt grubunu belirleyiniz.

22) $(Z,+)$ grubunda $m,n \in Z$ olmak üzere $\langle m\rangle \cap \langle n\rangle$ grubunun üretecini bulunuz.

23) G bir grup ve $ab=ba$ olacak şekilde $a,b \in G$ olsun. $o(a) = n, o(b) = m$ ve $(m,n) = 1$ ise $o(ab) = mn$ olduğunu gösteriniz.

24) S_3 grubunda $|a| = |b| = 2$ ve $|ab| = 3$ olacak şekilde $a,b \in S_3$ bulunuz.

25) S_3 devirli grup mudur ? Neden ?

26) $a = (1234), b = (24) \in S_4$ olsun.

i) $o(a)$ ve $o(b)$ yi bulunuz.

ii) $ba = a^3b = a^{-1}b$ olduğunu gösteriniz.

iii) S_4 de $H = \langle a, b \rangle$ yi bulunuz.

iv) $|H|$ yi bulunuz.

27) Klein 4-lü grubunu tüm alt gruplarını bulunuz.

28) $M(D_n)$ yi belirleyiniz.

29) G, $|a| = 4$, $a^2{=}b^2$ ve $ba = a^3b$ olmak üzere a ve b tarafından üretilen bir Quaternion grup olsun. Aşağıdaki ifadeleri ispatlayınız.

i) G grubunun her elemanının $0 \le i < 4, 0 \le j < 2$ olmak üzere $a^i b^j$ şeklindedir.
ii) G grubunun eleman sayısı 8 dir.
iii) G değişmeli olmayan bir gruptur.

30) $GL(n,R)$ grubunun $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in Z \right\}$ alt kümesinin bir devirli alt grup olduğunu gösteriniz.

31) $G = \{a + b\sqrt{2} \,:\, a, b \in Z\}$ toplamsal grubu devirli midir?

32) G bir grup ve H ve K da alt grupları olsun. $H \cup K < G$ olması için gerek ve yeter koşulun $H \subseteq K$ veya $K \subseteq H$ olmasıdır. Gösteriniz.

33) $G = \langle g \rangle$ ve $H = \langle h \rangle$ iki devirli grup olmak üzere $G \times H = \langle (g, e), (e, h) \rangle$ olduğunu ispatlayınız.

34) G bir grup, H ve K da G nin alt grupları olsun. $HK < G$ olması için gerek ve yeter koşulun $HK = \langle H \cup K \rangle$ olduğunu gösteriniz.

35) p ve q iki farklı asal sayı olsun. $\mathbb{Z}_{pq}$ grubunun kaç tane devirli alt grubu vardır?

36) p asal sayı , $r > 0, r \in \mathbb{Z}$ olsun. $\mathbb{Z}_{p^r}$ devirli grubunun kaç tane üreteci vardır?

37) Aşağıdaki ifadeler doğru / yanlış mıdır? Doğru ise ispat ediniz, yanlış ise bir örnek bularak sebebini açıklayınız.

(a) Her değişmeli grup devirlidir.
(b) $\mathbb{Q}$ toplamsal devirli gruptur.
(c) Devirli bir grubun her elemanı grubun üretecidir.

(d) Verilen her $n > 0$ için n. mertebeden en az bir değişmeli grup vardır.
(e) Mertebesi≤ 4 olan her grup devirlidir.
(f) $\mathbb{Z}_{20}$ nin tüm üreteçleri asal sayılardır.
(g) H ve K, G grubunun iki alt grubu ise $H \cap K$, G nin alt grubudur.
(h) Mertebesi> 2 olan her devirli grubun en az iki farklı üreteci vardır.