6. NORMAL ALT GRUPLAR

G bir grup ve $H < G$ olsun. 5. Bölümden $\forall a \in G$ için $aH = Ha$ eşitliğinin her zaman doğru olamayacağını biliyoruz. Fakat bu özelliği sağlayan gruplar, grup teorisinde önemli rol oynamaktadır. Bu bölümde bu tür grupları inceleyeceğiz.

Tanım 6.1. G bir grup ve $N < G$ olsun. Her $g \in G$ için $Ng = gN$ ise N ye G nin **normal alt grubu** denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir.

Teorem 6.2. (Normallik Testi) G bir grup ve $N < G$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

$(\boldsymbol{i})$ $N \lhd G$
$(\boldsymbol{ii})$ Her $g \in G$ için $gNg^{-1} \subseteq N$
$(\boldsymbol{iii})$ Her $g \in G$ için $gNg^{-1} = N$

İspat. $(\boldsymbol{i}) \Rightarrow (\boldsymbol{ii})$ $x \in gNg^{-1}$ olsun. Şu halde $x = ghg^{-1}$ olacak şekilde $h \in N$ vardır. Şu halde (i) den $gh \in gN = Ng$ olur. Böylece $gh = h_1 g$ olacak şekilde $h_1 \in N$ vardır. Bundan dolayı $x = ghg^{-1} = h_1 g g^{-1} = h_1 \in N$ elde ederiz.

$(\boldsymbol{ii}) \Rightarrow (\boldsymbol{iii})$ $g \in G$ olsun. Şu halde (ii) de g yerine g^{-1} alırsak $g^{-1}Ng \subseteq N$ ve böylece $N \subseteq gNg^{-1}$ olur. Sonuç olarak her $g \in G$ için $gNg^{-1} = N$ elde ederiz.

(iii) $\Rightarrow$ **(i)** $g \in G$ olsun. (3) den $gNg^{-1} = N$ dir. $x \in gN$ ise $xg^{-1} \in N$ ve böylece $x \in Ng$ dir. Yani $gN \subseteq Ng$ dir. (3) den $gNg^{-1} = N$ olduğundan g yerine g^{-1} yazarak $Ng \subseteq gN$ elde ederiz.

Sonuç 6.3. G bir grup ve $N < G$ olsun. $N \lhd G$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall g \in G$ ve $\forall\, n \in N$ için $gng^{-1} \in N$ olmasıdır.

Örnekler 6.4.

1) G bir grup ve $e \in G$ birim eleman olsun. Şu halde $\forall g \in G$ için $g\{e\} = \{g\} = \{e\}g$ olduğundan ve $\forall g \in G$ için $gG = G = Gg$ olduğundan $\{e\} \lhd G$, $G \lhd G$ elde ederiz. Bu iki normal alt gruba G nin aşikar (trivial) normal alt grubu denir.

2) Değişmeli bir grubun her alt grubu normal alt gruptur. Gerçekten, G bir grup ve $N < G$ olsun. $\forall g \in G$ ve $\forall\, n \in N$ için $gng^{-1} = ngg^{-1} = n \in N$ olduğundan $N \lhd G$ dir.

3) $S_3 = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2\}$ ve $|\sigma| = 3, |\tau| = 2, \sigma\tau\sigma = \tau$ olsun. $H = \{e, \sigma, \sigma^2\}$ ve $K = \{e, \tau\}$ ise $H \lhd S_3$ ve K , S_3 grubunun normal alt grubu değildir. $\forall \alpha \in H$ için $\alpha H = H = H\alpha$ olduğu açıktır ve $\sigma\tau = \tau\sigma^2$ olduğundan $H\tau = \{\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\} = \{\tau, \tau\sigma^2, \tau\sigma\} = \tau H$ elde ederiz. Benzer şekilde $H\tau\sigma = \tau\sigma H$ ve $H\tau\sigma^2 = \tau\sigma^2 H$ olduğundan $H \lhd S_3$ olur.

$\sigma K = \{\sigma, \sigma\tau\}$ ve $K\sigma = \{\sigma, \sigma^2\tau\}$ olduğundan $\sigma K \neq K\sigma$ dır. Böylece K, S_3 ün normal alt grubu değildir.

4) $H < G$ ve $K < G$ olsun.

a) $H \lhd G$ ise $HK < G$ dır.

b) $H, K \lhd G$ ise $HK \lhd G$ dir.

Çözüm :

a) $H \lhd G$ ise $\forall k \in K$ için $Hk = kH$ dir. $HK = \bigcup\limits_{k \in K} Hk = \bigcup\limits_{k \in K} kH = KH \Rightarrow HK < G$ dir.

b) **a)** dan $HK < G$ dir. $\forall g \in G$,$\forall\ hk \in HK$ için

$g(hk)g^{-1} = (ghg^{-1})(gkg^{-1}) \in HK \Rightarrow HK \lhd G$ dır.

5) G değişmeli bir grup ve H da G nin **torsion (burulmalı)** alt grubu olsun. (mertebesi sonlu elemanların kümesi) olsun.

a) $H \lhd G$

b) G / H nin birimden farklı her elemanının mertebesi sonsuzdur.

Çözüm :

a) $H = \{g \in G : o(g) = sonlu\}$ olmak üzere,

$a, b \in H \Rightarrow o(a) = r, o(b) = s \Rightarrow (ab^{-1})^{rs} = (a^r)^s (b^s)^{-r} = e$

$ab^{-1} \in G$ nin mertebesi sonlu, yani $ab^{-1} \in H$ bulunur. $H < G$ dır. Değişmeli grubun her alt grubu normal olacağından H torsion alt grubu normaldir.

b) $aH \in G / H$ ve $aH \neq H$ olsun. $o(aH) = r \Rightarrow H = (aH)^r = a^r H \Rightarrow a^r H = H$

$\Rightarrow a^r \in H \Rightarrow (a^r)^t = e$. Yani a nın mertebesi sonlu olurdu. Bu ise $a \notin H$ olması ile yani a nın mertebesinin sonsuz olması ile çelişir.

6) Grubun merkezi bir normal alt gruptur.

Gerçekten $M(G) < G$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca, $\forall g \in G$ ve $\forall a \in M(G)$ için $gag^{-1} = agg^{-1} = a \in M(G)$ olduğundan $M(G) \lhd G$ dir

7) Bir grubun bir takım normal alt gruplarının kesişiminin de bir normal alt grup olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $\{N_i\}_{i \in I}, G$ grubunun bir takım normal alt grupları olsunlar. $\bigcap_{i \in I} N_i < G$ olduğunu biliyoruz. $\bigcap\limits_{i \in I} N_i \lhd G$ olduğunu gösterelim.

$\forall a \in \bigcap\limits_{i \in I} N_i, \forall g \in G$ için $\Rightarrow \forall i \in I$ için $a \in N_i$

$\Rightarrow \forall i \in I$ için $gag^{-1} \in N_i$

$\Rightarrow gag^{-1} \in \bigcap\limits_{i \in I} N_i$

Şu halde $\bigcap\limits_{i \in I} N_i \lhd G$ elde etmiş oluruz.

8) G her devirli alt grubu normal olan bir grup ise G nin her alt grubu devirlidir. Gerçekten, $H < G$ olsun. $g \in G$ ve $a \in H$ ise $gag^{-1} \in \langle a \rangle \subseteq H$ olduğundan $H \lhd G$ dir.

9) G bir grup ve $H < G$ olsun. H nin G deki iki sol denklik sınıfının çarımı yine sol denklik sınıfı ise $H \lhd G$ dir. Gerçekten, $g \in G$ olsun. Şu halde $gHg^{-1}H = tH$ olacak şekilde $t \in G$ vardır. Böylece $e = geg^{-1}e \in gHg^{-1}H = tH$ elde ederiz. Bundan dolayı $e = th$ olacak şekilde $h \in H$ vardır . Şu halde $t = h^{-1}e$ ve böylece $tH = H$ dır. Sonuç olarak $gHg^{-1} \subseteq gHg^{-1}H = H$ ve böylece $H \lhd G$ elde ederiz.

Teorem 6.5. Bir grubun indeksi 2 olan bir alt grubu normaldir.

İspat : $N < G$ ve $(G:N) = 2$ olsun. Bu takdirde iki tane sağ ve iki tane sol denklik sınıfı vardır. N hem sağ hem de sol denklik sınıfı olarak düşünülebilir. $a \notin N$ ise sol denklik sınıfları N, aN ve sağ denklik sınıfları N, Na olur. Böylece $G = N \cup aN = N \cup Na$ olduğundan $aN = Na$ dır. Sonuç olarak $N \lhd G$ elde edilir.

Örnek 6.6. $G = S_3$ ve $H = \{(1),(123),(132)\}$ olsun. $H < G$ olduğu açıktır. Ayrıca, $(G:N) = 2$ olduğundan $H \lhd G$ dir.

Örnek 6.7. $A_n \lhd S_n$ dir. Gerçekten, $(S_n : A_n) = \frac{n!}{\frac{n!}{2}} = 2$ olduğundan Teorem 6.5 den istenilen elde edilir.

Tanım 6.8. Bir G grubunun öz olan hiç normal alt grubu yoksa G ye **basit grup** denir.

Örnek 6.9. Mertebesi asal olan grup basittir.

Teorem 6.10. G değişmeli bir grup ve $G \neq \{e\}$ olsun. G nin basit grup olması için gerek ve yeter koşul G nin asal mertebeli devirli grup olmasıdır.

İspat. Değişmeli grupların alt gruplarının normal olduğunu biliyoruz. Eğer G değişmeli ve basit grupsa alt grupları sadece G ve $\{e\}$ dir. Böylece $a \neq e$ ve $a \in G$ ise $G = \langle a \rangle$ dır. Eğer $|a| = \infty$ ise $\langle a^2 \rangle \neq \{e\}$ dir. Bu ise varsayımımızla çelişir. Böylece G sonlu bir gruptur. Şimdi $|G| = n \geq 2$ olduğunu kabul edelim. Eğer bir p asal sayısı için $p|n$ ise $\langle a^{n/p} \rangle$ mertebesi p olan bir alt gruptur. Böylece $G = \langle a^{n/p} \rangle$ asal mertebeli devirli gruptur. Teoremin tersinin ispatı Lagrange teoreminin bir sonucu olarak açıktır.

Lemma 6.11 $n \geq 5$ olsun. Eğer $H \lhd A_n$ ve H bir 3-lü devir içeriyorsa $H = A_n$ dir.

İspat. Genelliği bozmadan $(123) \in H$ alalım. (Yani herhangi başka üçlü devir alsak da ispat yapılabilir). Örnek 4.8 den A_n grubunun üçlü devirler tarafından üretildiğini biliyoruz. Şu halde her üçlü devir (ijk) nın H de olduğunu gösterisek ispatı tamamlamış oluruz. $n \geq 5$ olduğundan $p, q \notin \{i, j, k\}$ seçebiliriz. Şimdi $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i & j & k & p & q \end{pmatrix}$ alalım ve

$$\tau = \begin{cases} \tau = \sigma & ; \sigma \ \ çift\ ise \\ \tau = (pq)\sigma & ; \sigma \ \ tek\ ise \end{cases}$$

tanımlayalım. Şu halde her iki durumda $\tau \in A_n$ ve $(ijk) = \tau(123)\tau^{-1} \in H$ elde ederiz.

- Teorem 6.12 ispatını yapmadan önce şunu not edelim : $f = (ijk)$ ise f permütasyonu $i, j\ ve\ k$ tamsayılarını değiştiyor deriz.

Teorem 6.12. $n \geq 5$ ise A_n alterne grubu basit gruptur.

İspat. $\{e\} \neq H \lhd A_n$ olsun. H nin birimden farklı elemanları arasında en az tamsayıyı değiştiren (yani görüntüsü farklı olan) elemanı τ olsun. Şimdi τ nun m tane tam sayıyı değiştirdiğini kabul edelim. τ transpozisyon olamayacağından $m \geq 3$ olur. Eğer $m = 3$ ise τ, 3 -devirli dir ve Lemma 6.11 den $H = A_n$ dir. $m \geq 4$ olduğunu kabul edelim ve bu kabulun çelişki oluşturacağını ispatlayalım. İki durum söz konusudur.

Durum 1. τ, uzunluğu 3 veya daha büyük bir devir içesin, yani $\tau = (1\ 2\ 3\ \ldots)\gamma_2\gamma_3 \ldots \gamma_n$ olsun. τ devirinde tam 4 tane tam sayının görüntüsü farklı olamaz. Gerçekten $\tau = (1\ 2\ 3\ k)$ tek olduğundan çelişki olurdu. Şimdi 1,2 ve 3 de olduğu gibi 4 ve 5 in görüntülerinin kendilerinden farklı olduğunu kabul edelim. Şimdi $\beta = (345)$ olduğunu kabul edelim ve $\tau_1 = \tau^{-1}\beta\tau\beta^{-1}$ olsun. $H \lhd A_n$ olduğundan $\tau_1 \in H$ ve $\tau_1(2) = \tau^{-1}(4) \neq 2$ olduğundan $\tau_1 \neq e$ dir. Eğer $k > 5$ tam sayısı τ tarafından sabit bırakılırsa bu k tam sayısı τ_1 tarafındanda sabit bırakılır $(\beta(k) = k)$. Eğer τ_1 altında $k > 5$ tam sayısının görüntüsü kendisinden farklı ise τ altında k tam sayısının görüntüsü kendisinden farklıdır. Fakat $\tau_1(1) = 1$ fakat $\tau(1) \neq 1$ dir. Böylece τ_1 de τ dan daha az elemanın görüntüsü kendisinden farklıdır. Bu bir çelişki oluşturur.

Durum 2. τ birbirinden ayrık transpozisyonların çarpımı olsun. Yani $\tau = (12)(34) \ldots$ olduğunu kabul edelim. Şimdi $\beta = (345)$ olduğunu ve $\tau_1 = \tau^{-1}\beta\tau\beta^{-1}$ olduğunu kabul edelim. Şu halde $\tau_1(1) = 1$, $\tau_1(2) = 2$ ve $\tau(k) = k$ olacak şekide her $k > 5$ için $\tau_1(k) = k$ dır. Ayrıca, $\tau_1(5) = 3$ olduğundan $\tau_1 \neq e$ dir. Sonuç olarak 1.Durumda olduğu gibi çelişki elde ederiz.

Sorular

1) $K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \lhd A_4$ olduğunu gösteriniz. Böylece A_4 grubu basit değildir.

2) A_2 ve A_3 grubunun basit olduğunu gösteriniz.

3) $GL(2, \mathbb{R})$ grubunda determinantı 1 olan matrislerin kümesi H ise $H \lhd G$ olduğunu gösteriniz. $(SL(2, \mathbb{R}) \lhd GL(2, \mathbb{R}))$.

4) $n \geq 5$ olmak üzere A_n grubunun $\frac{n!}{4}$ mertebeden bir alt grubu olmadığını gösteriniz. (Bu soru Langrange Teoreminin tersinin doğru olmadığına dair örnektir).

5) D_4 grubunun tüm normal alt gruplarını bulunuz.

6) D_4 grubunun öyle iki H ve K alt gruplarını bulunuz ki $K \lhd H$ ve $H \lhd D_4$ fakat K, D_4 grubunun normal alt grubu olmasın.

7) $K \lhd H$ ve $H \lhd G$ ise $\forall a \in G$ için $aKa^{-1} \lhd H$ olduğunu gösteriniz.

8) G bir grup ve $D = \{(g, g): g \in G\}$ olsun. $D \lhd G \times G$ olması için gerek ve yeter koşul G nin değişmeli olmasıdır. Gösteriniz.

9) $|a| = 12, |b| = 2 \ ve \ aba = b$ olmak üzere $D_{12} = \{e, a, , \dots, a^{11}, b, ba, \dots, ba^{11}\}$ göz önüne alalım. Aşağıdaki her bir durumda $H \lhd D_{12}$ olup olmadığını araştırınız.

i) $H = \{e, a^6, b, ba^6\}$

ii) $H = \{e, a^4, a^8, b, ba^4, ba^8\}$

iii) $H = \{e, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}, b, ba^2, ba^4, ba^6, ba^8, ba^{10}\}$

10) G bir grup ve $N < G$ olsun. $(G: N) = 3$ olması $N \lhd G$ olmasını gerektirmediğini bir örnekle gösteriniz.

11) G bir grup ve $H \lhd G$ olsun. $|H| = 2$ ise $H \subseteq M(G)$ olduğunu gösteriniz.

12) G bir grup ve $\emptyset \neq X \subseteq G$ ise $N(X) = \{x \in G: xHx^{-1} = H\}$ kümesine X in **normalleyicisi** denir.

$\boldsymbol{a}$) $N(X) < G$ olduğunu gösteriniz.

$\boldsymbol{b}$) $H < G \Rightarrow H \lhd N(H)$ olduğunu gösteriniz.

13) G bir grup ve $H < G$ olsun. Şu halde $W = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} \lhd G$ olduğunu gösteriniz.

14) G bir grup ve $H \lhd G, K \lhd G$ olsun. Eğer $H \cap K = \{e\}$ ise $\forall h \in H$ ve $\forall k \in K$ için $hk = kh$ olduğunu gösteriniz.

15) G bir grup ve $H < G,\ K < G$ olsun. Eğer $H \lhd G$ ise $H \cap K \lhd K$ dir, gösteriniz.

16) G bir grup ve H, mertebesi n olan tek alt grubu ise $H \lhd G$ olduğunu gösteriniz.

17) Quaternion grubun her alt grubunun normal olduğunu gösteriniz.

18) S_3 grubunda $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ile üretilen devirli grup, S_3 de normal alt grup mudur? Neden?

19) G bir grup ve $n > 1$ bir tam sayısı olmak üzere $\forall a, b \in G$ için $(ab)^n = a^n b^n$ sağlansın. Şu halde $G^n = \{x^n : x \in G\} \lhd G$ olduğunu gösteriniz.

20) Aşağıdaki ifadeler doğru/yanlış mıdır? Doğru ise açıklayınız, yanlış ise bir ters örnek bulunuz.

i) $H < G$ nin normal alt grup olması için gerek ve yeter koşul H nın her sağ kalan sınıfının aynı zamanda bir sol kalan sınıfı olmasıdır.

ii) G sonlu bir grup ve H, G nin normal alt grubu ise $[G : H] = 2$ dir.

iii) G grubunun her değişmeli alt grubu, G nin normal alt grubudur.

iv) G mertebesi n olan bir grup ve $m|n$ ise G nin m. mertebeden bir alt grubu vardır.