# 7. Bölüm Grupları

$n \geq 2$ olmak üzere $Z_n$ grubunu nasıl inşa ettiğimizi hatırlayalım. $(Z, +)$ grubunun $nZ$ alt grubu için $Z_n$ grubu tüm $\bar{a} = nZ + a$ ( $a \in Z$ ) olacak şekilde tüm sınıflardan oluşmuştur. Sınıfların toplamını $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ ile, yani $(nZ + a) + (nZ + b) = nZ + (a + b)$ ile tanımlamıştık. Şimdi bu örnekten yararlanarak genel tanım vermeye çalışalım:
$G$ bir grup ve $H < G$ olsun. Sağ kalan sınıfları çarpımını

$$\forall a, b \in G \text{ için } \quad Ha.Hb = Hab \qquad (*)$$

ile tanımlayalım. Fakat kalan sınıfların farklı üreteçleri olduğundan ($Ha = Ha_1$ gibi) bu tanım bazı alt gruplar için anlamsız olabilir. Şimdi bu durumu bir örnekle açıklayalım.

**Örnek 7.1.** $S_3$ simetri grubunu göz önüne alalım. Şu halde $H = \{e, (12)\} < S_3$ dür. Şimdi $x = H(13) = H(132)$ ve $y = H(23) = H(123)$ kalan sınıflarını göz önüne alalım. Eğer $x = H(13)$ ve $y = H(23)$ olarak alırsak $(*)$ işlemini kullanarak

$$xy = H(13)H(23) = H(13)(23) = H(132)$$

veya $x = H(132)$ ve $y = H(123)$ almak istersek

$$xy = H(132)H(123) = H(132)(123) = He = H$$

sonucunu elde ederiz. Fakat $H \neq H(132)$ olduğundan $xy$ çarpımı anlamsızdır.

Örnek 7.1 deki problemle karşılaşmamak için $H$ üzerine nasıl bir şart eklenebilir ? Yani, $Ha = Ha_1$ ve $Hb = Hb_1$ ise $Hab = Ha_1b_1$ sağlanmasından nasıl emin olabiliriz? Bu durum sağlandığında $(*)$ ile verilen $Ha.Hb = Hab$ çarpımının **iyi tanımlı** olduğunu söyleyeceğiz. Aşağıdaki önermede bu şartın $H$ nin normal alt grup olması olduğunu göreceğiz.

**Lemma 7.2.** $G$ bir grup ve $K < G$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

$(a)$ $K \lhd G$

$(b)$ Sağ kalan sınıfların $Ka.Kb = Kab$ çarpımı iyi tanımlıdır.

**İspat.** $(a) \Rightarrow (b)$. $Ka = Ka_1$ ve $Kb = Kb_1$ ise $Kab = Ka_1b_1$ olduğunu veya buna denk olarak $ab(a_1b_1)^{-1} \in K$ olduğunu göstermeliyiz. $a_1 \in Ka_1 = Ka$ olduğundan $a_1 = k_1a$ olacak şekilde $k_1 \in K$ vardır. Benzer şekilde $b_1 = k_2b$ olacak şekilde $k_2 \in K$ vardır. Şu halde $K \lhd G$ olduğundan

$$ab(a_1b_1)^{-1} = ab(b_1^{-1}a_1^{-1}) = ab(b^{-1}k_2^{-1})(a^{-1}k_1^{-1}) = [a(k_2^{-1})a^{-1}]k_1^{-1} \in K \text{ dir.}$$

$(b) \Rightarrow (a)$. $\forall\, a \in G$ için $aK = Ka$ olduğunu göstereceğiz. $g \in aK$ olsun. Şu halde $g = ak$ olacak şekilde $k \in K$ vardır. $Ka = Ka$ ve $Kk = Ke$ olduğundan $(b)$ den $Kak = Kae$ dir. Yani $Kg = Ka$ dır. Bundan dolayı $g \in Kg = Ka$ ve böylece $aK \subseteq Ka$ elde ederiz. Benzer şekilde $Ka \subseteq aK$ olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak $\forall\, a \in G$ için $aK = Ka$ elde ederiz.

**Teorem 7.3.** $G$ bir grup ve $K \lhd G$ olsun. $K$ nın tüm ( sol veya sağ ) denklik sınıflarının kümesini ${}^{G}\!/_{K} = \{Ka : a \in G\}$ ile gösterelim.

(1) $Ka.Kb = Kab$ işlemi altında ${}^{G}\!/_{K}$ bir gruptur.

(2) $G$ değişmeli grup ise ${}^{G}\!/_{K}$ grubu da değişmelidir.

(3) $G$ sonlu grup ise $\left|{}^{G}\!/_{K}\right| = \frac{|G|}{|K|} = (G:K)$ dır.

**İspat.** (1) Lemma 7.2 den ${}^{G}\!/_{K}$ üzerindeki işlem iyi tanımlıdır. $G$ grubunun birimi $e$ olmak üzere $\forall\, Ka \in {}^{G}\!/_{K}$ için $Ka.Ke = Ka = Ke.Ka$ olduğundan $Ke$ birimdir. $Ka \in {}^{G}\!/_{K}$ için olduğundan $Ka.Ka^{-1} = Ke = Ka^{-1}.Ka$ olduğundan $(Ka)^{-1} = Ka^{-1}$ dir. Son olarak $G$ nin birleşme özelliğini kullanarak : $\forall Ka, Kb, Kc \in {}^{G}\!/_{K}$ için

$$Ka.(Kb.Kc) = Ka.Kbc = Ka(bc) = K(ab)c = Kab.Kc = (Ka.Kb).Kc$$

olduğu görülür.

(2 ) $G$ değişmeli grup ise $\forall\, Ka, Kb \in {}^{G}\!/_{K}$ için $Ka.Kb = Kab = Kba = Kb.Ka$ olacağından ${}^{G}\!/_{K}$ değişmeli gruptur.

(3) $G$ sonlu grup ise $(G:K)$ nın tanımından $\left|{}^{G}\!/_{K}\right| = (G:K)$olduğundan Sonuç 5.17 den $\left|{}^{G}\!/_{K}\right| = (G:K) = \frac{|G|}{|K|}$ dır.

**Tanım 7.4.** $G$ bir grup ve $N \lhd G$ olsun. $G$ nin $N$ ye göre tüm kalan sınıflarının $G/N$ grubuna $G$ nin $N$ ye göre **bölüm grubu** denir.

**Örnek 7.5.** $n$ bir tamsayı olmak üzere $(Z, +)$ grubunun $(\langle n \rangle, +)$ alt grubunu göz önüne alalım. $Z$ değişmeli bir grup olduğundan $(\langle n \rangle, +)$ bir normal alt gruptur. Bundan dolayı

$$\forall\, a + \langle n \rangle, b + \langle n \rangle \in {}^{Z}\!/_{\langle n \rangle} \text{ için } (a + \langle n \rangle) + (b + \langle n \rangle) = (a + b) + \langle n \rangle$$

işlemi altında $\left({}^{Z}\!/_{\langle n \rangle}, +\right)$ bir gruptur. Şimdi ${}^{Z}\!/_{\langle n \rangle}$ yi belirleyelim. Eğer $k + \langle n \rangle$ , $\langle n \rangle$ nin $Z$ de herhangi bir sol denklik sınıfı olsun. Bölme algoritmasından $k = qn + r$ ve $0 \leq r < n$ olacak şekilde $q$ ve $r$ tam sayıları vardır. Bundan dolayı $k - r = qn \in \langle n \rangle$ ve böylece $k + \langle n \rangle = r + \langle n \rangle$ dir. $0 \leq i, j < n$ olmak üzere $i + \langle n \rangle = j + \langle n \rangle$ olsun. Şu halde $i - j \in \langle n \rangle$ ve böylece $n/(i - j)$ dir. $0 \leq i, j < n$ olduğundan dolayı $i - j = 0$, yani $i = j$ elde ederiz. Şu halde ${}^{Z}\!/_{\langle n \rangle} = \{0 + \langle n \rangle, 1 + \langle n \rangle, 2 + \langle n \rangle, \ldots, n - 1 + \langle n \rangle\}$ dir.

**Örnek 7.6.** $(Z_8,+)$ grubunu göz önüne alırsak $H=\{\bar{0},\bar{4}\}\lhd Z_8$ olduğu açıktır. Ayrıca, $|H|=2$ ve $|Z_8|$=8 olduğundan $|Z_8/H|=\frac{|Z_8|}{|H|}=4$ elde ederiz. Şu halde

$$\begin{aligned}
&\bar{0}+H=H=H=\bar{4}+H\\
&\bar{1}+H=\{\bar{1},\bar{5}\}=\bar{5}+H\\
&\bar{2}+H=\{\bar{2},\bar{6}\}=\bar{6}+H\\
&\bar{3}+H=\{\bar{3},\bar{7}\}=\bar{7}+H
\end{aligned}$$

olduğundan $Z_8/H=\{\bar{0}+H,\bar{1}+H,\bar{2}+H,\bar{3}+H\}$ elde edilir.

**Örnek 7.7.** $(Z_4\times Z_6,+)$ grubunu göz önüne alalım.
$H=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{0},\bar{3}),(\bar{0},\bar{4}),(\bar{0},\bar{5})\}$ olsun. Şu halde $H<Z_4\times Z_6$ ve $Z_4\times Z_6$ değişmeli olduğundan $H\lhd Z_4\times Z_6$ dır. Ayrıca,
$|Z_4\times Z_6|$ =24 ve $|H|$=6 ve böylece $|(Z_4\times Z_6)/H|=\dfrac{|Z_4xZ_6|}{|H|}=4$ elde edilir. Yani $(Z_4\times Z_6)/H$ grubunun 4 elemanı vardır. Şimdi bu elemanları bulalım:
$\forall\bar{n}\in Z_6$ için $(\bar{0},\bar{n})\in H$ olduğundan $(\bar{0},\bar{n})+H=H$ elde ederiz. Böylece $m=0,1,2,3$ için $(\bar{m},\bar{n})+H=(\bar{m},\bar{0})+(\bar{0},\bar{n})+H=(\bar{m},\bar{0})+H$ elde ederiz. Şu halde

$$\begin{aligned}
&(\bar{0},\bar{0})+H=H\\
&(\bar{1},\bar{0})+H=\{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2}),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{1},\bar{4}),(\bar{1},\bar{5})\}\\
&(\bar{2},\bar{0})+H=\{(\bar{2},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{2},\bar{3}),(\bar{2},\bar{4}),(\bar{2},\bar{5})\}\\
&(\bar{3},\bar{0})+H=\{(\bar{3},\bar{0}),(\bar{3},\bar{1}),(\bar{3},\bar{2}),(\bar{3},\bar{3}),(\bar{3},\bar{4}),(\bar{3},\bar{5})\}.
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(Z_4\times Z_6)/H=\{H,\ (\bar{1},\bar{0})+H,\ (\bar{2},\bar{0})+H,\ (\bar{3},\bar{0})+H\}$ olur.

**Örnek 7.8.** $|a|=12$ olmak üzere $G=\langle a\rangle$ ve $K=\langle a^4\rangle$ olsun. Şimdi $G/K$ grubunu belirleyelim. $G$ değişmeli grup olduğu için $K\lhd G$ olduğu açıktır. Ayrıca, $|G/K|=4$ tur. Şimdi $G/K$ grubunu belirleyelim. Denklik sınıfları :

$$\begin{aligned}
&K=\{e,a^4,a^8\}\\
&Ka=\{a,a^5,a^9\}\\
&Ka^2=\{a^2,a^6,a^{10}\}\\
&Ka^3=\{a^3,a^7,a^{11}\}
\end{aligned}$$

olur. Yani $G/K=\{K,Ka,Ka^2,Ka^3\}$ elde ettik. Ayrıca, $Ka^2=(Ka)^2$, $Ka^3=(Ka)^3$ ve $K=Ka^4=(Ka)^4$ olduğundan $G/K=\langle Ka\rangle$ elde ederiz.

**Örnek 7.9.** $K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ olsun. Şu halde $K \lhd A_4$ ve $|A_4/K| = 3$ olur. Şimdi $A_4/K$ grubundaki bütün elelmanlarının

$$\begin{aligned} Ke = eK &= \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \\ K(123) = (123)K &= \{(123), (243), (142), (134)\} \\ K(132) = (132)K &= \{(132), (143), (234), (124)\} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca, $K(132) = [K(123)]^2$ olduğundan $A_4/K = \langle K(123) \rangle$ grubu devirlidir. Bunu $|A_4/K| = 3$ olmasından da söyleyebilirdik.

**Örnek 7.10.** $|a| = 4, |b| = 2$ ve $aba = b$ olmak üzere $D_4 = \{e, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$ grubunu göz önüne alalım. İlk olarak $M(D_4)$ merkezini belirleyelim. Önceden bildiğimiz gibi $M(D_4) \lhd D_4$ tür. Her $k = 1,2,3$ tam sayısı için

$$a(ba^k) = ba^{k+3} \neq ba^{k+1} = (ba^k)a$$

olduğundan $ba^k \notin M(D_4)$ elde edilir. Benzer şekilde

$$ab = ba^3 \neq ba \quad \text{ve} \quad a^3b = ba \neq ba^3$$

olduğundan $a \notin M(D_4)$ ve $a^3 \notin M(D_4)$ elde edilir. Fakat $e, a^2 \in M(D_4)$ olduğu görülebilir. Böylece $M(D_4) = \{e, a^2\}$ dir. Şimdi $D_4/M(D_4)$ grubunu belirleyelim.

$$M(D_4) = \{e, a^2\},\ M(D_4)a = \{a, a^3\}, M(D_4)b = \{b, ba^2\} \quad \text{ve} \quad M(D_4)ba = \{ba, ba^3\}$$

olduğundan $D_4/M(D_4) = \{M(D_4), M(D_4)a, M(D_4)b, M(D_4)ba\}$ elde ederiz.

**Örnek 7.11.** $|a|$=18 olmak üzere $G = \langle a \rangle$ ve $K = \langle a^6 \rangle$ olsun. Şimdi $G/K$ grubunun $Ka^5$ elemanının mertebesini bulalım.

$K = \{e, a^6, a^{12}\}$ olduğundan $|G/K| = \frac{|G|}{|K|} = \frac{18}{3} = 6$ olur. Şu halde Langrange teoreminden $Ka^5$ elemanının mertebesi 1,2,3 ve 6 olabilir. Fakat

$$Ka^5 \neq K,\ (Ka^5)^2 = Ka^{10} \neq K \quad \text{ve} \ (Ka^5)^3 = Ka^{15} \neq K$$

olduğundan $Ka^5$ elemanının mertebesi 1,2 veya 3 olamaz. Yani 6 olmalıdır.

**Teorem 7.12.** $G$ bir grup ve $K < M(G)$ olsun. Eğer $G/K$ devirli grup ise $G$ değişmeli gruptur.

**İspat.** $G/K = \langle Kg \rangle$ olsun. $a, b \in G$ alalım. Şu halde $G/K = \langle Kg \rangle$ olduğundan *m* ve *n* tam sayıları için $Ka = Kg^m$ ve $Kb = Kg^n$ elde ederiz. Böylece $k, k_1 \in K$ olmak üzere $a = kg^m$ ve $b = k_1g^n$ elde ederiz. Kabulümüz den $k, k_1 \in M(G)$ olur. Böylece

$$ab = kg^m k_1 g^n = kk_1 g^{n+m} = k_1 g^n k g^m = ba$$

elde ederiz. Yani $G$ değişmeli gruptur.

Şimdi $G/K$ grubunun ne zaman değişmeli olduğunu inceleyelim.
Herhangi $Ka, Kb \in G/K$ için

$$Ka.Kb = Kb.Ka \Leftrightarrow Kab = Kba \Leftrightarrow ab(ba)^{-1} \in K \Leftrightarrow aba^{-1}b^{-1} \in K$$

olduğundan bu düşünce ile aşağıdaki tanımı yapabiliriz.

**Tanım 7.13.** $G$ bir grup ve $a, b \in G$ olsun. $aba^{-1}b^{-1}$ elemanına $a$ ve $b$ nin **komütatörü** denir ve $[a, b]$ ile gösterilir. Bir G grubunun bütün komütatörlerinin ürettiği alt gruba G nin **komütatör alt grubu** veya **türev alt grubu denir** ve $\boldsymbol{G'}$ ile gösterilir.

**Teorem 7.14.** $G$ bir grup ve $G'$ de türev türev grubu olsun. Şu halde

$(i)$ $G' \lhd G$.

$(ii)$ $G/G'$ grubu değişmelidir.

$(iii)$ $H \lhd G$ olsun. $G/H$ grubunun değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $G' \subseteq H$ olmasıdır.

**İspat.** $(i)$ $x = aba^{-1}b^{-1}$, $G$ grubunun bir komütatörü olsun. Şu halde $x^{-1} = bab^{-1}a^{-1}$ elemanıda $G$ nin bir komütatörüdür. Böylece herhangi $g \in G$ için

$$\begin{aligned} gxg^{-1} &= (gag^{-1})(gbg^{-1})(gag^{-1})(ga^{-1}g^{-1})(gb^{-1}g^{-1}) \\ &= (gag^{-1})(gbg^{-1})(gag^{-1})^{-1}(gbg^{-1})^{-1} \in G' \end{aligned}$$

elde ederiz. Herhangi $y \in G'$ sonlu sayıda komütatörün çarpımı olarak yazıldığından $x_1, x_2, \dots, x_n$ komütatörler olmak üzere $y = x_1 x_2 \dots x_n$ olur. Böylece herhangi bir $g \in G$ için

$$gyg^{-1} = (gx_1g^{-1})(gx_2g^{-1}) \dots (gx_ng^{-1}) \in G'$$

olduğundan $G' \lhd G$ dir.

$(ii)$ $\forall\, a, b \in G$ için $(aG')(bG')(aG')^{-1}(bG')^{-1} = (aba^{-1}b^{-1})G' = G'$ olduğundan $(aG')(bG') = (bG')(aG')$ elde edilir. Böylece $G/G'$ grubu değişmelidir.

$(iii)$ $G/H$ grubunun değişmeli olduğunu kabul edelim. Şu halde $\forall a, b \in G$ için

$$(aba^{-1}b^{-1})H = (aH)(bH)(aH)^{-1}(bH)^{-1} = (aH)(aH)^{-1}(bH)(bH)^{-1} = H$$

olduğundan $aba^{-1}b^{-1} \in H$ ve böylece $G' \subseteq H$ elde ederiz. İspatın tersi benzer şekilde ispatlanabilir.

**Sorular.**

**1 )** Aşağıdaki her bir durumda $G/K$ grubunu belirleyiniz.

$(i)$ $G = D_6$ ve $K = M(D_6)$
$(ii)$ $G = \mathbb{Q}$ ve $K = M(\mathbb{Q})$
$(iii)$ $A$ ve $B$ herhangi iki grup olmak üzere $G = A \times B$ ve $K = \{(a, e) : a \in A\}$
$(iv)$ $|a| = 8$ ve $|b| = 2$ olmak üzere $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ ve $K = \langle (a^2, b) \rangle$

**2)** Aşağıdaki bölüm gruplarının mertebelerini bulunuz.

a) $\mathbb{Z}_6/\langle 3 \rangle$
b) $\frac{\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2}{<(2,1)>}$
c) $\frac{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4}{<(1,1)>}$
d) $\frac{\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}}{(<2>,<2>)}$

**3)** $|a| = 24$ olmak üzere $G = \langle a \rangle$ olsun. Eğer $K = \langle a^{12} \rangle$ ve $H = \langle a^6 \rangle$ ise

$(i)$ $G/K$ grubunda $Ka^2, Ka^3, Ka^4$ ve $Ka^5$ elemanlarının mertebelerini bulunuz.
$(ii)$ $G/H$ grubunda $Ha^2, Ha^3, Ha^4$ ve $Ha^5$ elemanlarının mertebelerini bulunuz.

**4)** $|a| = 8$ ve $|b| = 12$ olmak üzere $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ olsun.
$(i)$ $K = \langle (a^2, b^3) \rangle$ ise $G/K$ grubunda $K(a^4, b)$ elemanının mertebesini bulunuz.
$(ii)$ $K = \langle (a, b^2) \rangle$ ise $G/K$ grubunda $K(a^2, b)$ elemanının mertebesini bulunuz.

**5)** $|a| = 12$, $|b| = 2$ ve $aba = b$ olmak üzere $G = D_{12} = \langle a, b \rangle$ olsun.

$(i)$ $K = \langle a^2 \rangle$ ise $G/K$ grubunda $Ka^2, Ka^3, Ka^5$ ve $Kab$ elemanlarının mertebelerini,
$(ii)$ $K = \langle a^3, b \rangle$ ise $G/K$ grubunda $Ka^2, Ka^5$ ve $Kba^2$ elemanlarının mertebelerini bulunuz.

**6)** $Z_4 \times Z_4 \times Z_8/\langle (1,2,4) \rangle$ bölüm grubunun mertebesini bulunuz.

**7)** **a)** $Z_{12}/\langle \bar{4} \rangle$ grubunda $5 + \langle \bar{4} \rangle$ elemanının mertebesini bulunuz.
**b)** $Z_{60}/\langle \overline{12} \rangle$ grubunda $26 + \langle \overline{12} \rangle$ elemanının mertebesini bulunuz.

**8)** $\mathbb{Q}/Z$ grubunun her elemanının mertebesi sonlu olan sonsuz grup olduğunu gösteriniz.

**9)** $K \subseteq H \subseteq G$ sonlu gruplar ve $K \lhd G$ olsun.
$a$ ) $H/K = \{Kh : h \in H\} < G/K$ olduğunu gösteriniz.
b ) $(G/K : H/K) = (G : H)$ olduğunu ispatlayınız.

**10)** $K \lhd G$ ve $g \in G$ olmak üzere $|g| = n$ olsun. Şu halde $Kg$ nin $G/K$ grubundaki mertebesinin $n$ yi böldüğünü gösteriniz.

**11)** $G$ bir grup ve $(G:K) = m$ ise $\forall g \in G$ için $g^m \in K$ olduğunu gösteriniz.

**12)** $G$ sonlu bir grup ve $K \lhd G$ olsun. $G/K$ grubunun mertebesi $n$ olan bir elemanı varsa $G$ grubunda mertebesi $n$ olan grubu vardır.Gösteriniz.

**13)** $K \lhd G$ olsun. $K$ ve $G/K$ gruplarının her ikisininde aşağıda belirtilen özellikleri varsa $G$ grubunda aynı özelliğe sahip olduğunu gösteriniz.

*a* ) $M(\mathrm{K}) = \{\mathrm{e_G}\}$ ve $M(G/K) = \{e_{G/K}\}$ dır.

*b)* Her eleman sonlu mertebelidir.

*c)* Her elemanın mertebesi bir $p$ asal sayısının kuvvetidir.

*d)* Sonlu üretilmiştir.

**14 )** $G$ bir grup ve $G = \langle X \rangle$ olsun. Eğer $K \lhd G$ ise $G/K$ grubunun $\{Kx : x \in X\}$ tarafından üretildiğini gösteriniz.

**15)** G bir grup ve $\forall a, b \in H$ için $ab \in H$ şartını sağlıyan $H \subseteq G$ alt kümesini göz önüne alalım. Şu halde $\forall g \in G$ için $g^2 \in H$ ise $H \lhd G$ ve $G/H$ grubunun değişmeli olduğunu gösteriniz.

**16)** Aşağıdaki her bir durum için G nin türev grubu $G'$ grubunu bulunuz.

$(a)$ G değişmeli grup tur.

$(b)$ $G = \mathbb{Q}$

$(c)$ $G = D_6$

$(d)$ $G = S_n$

**17)** $G$ ve $H$ iki grup olmak üzere $(G \times H)' = G' \times H'$ olduğunu gösteriniz.

**18)** $H < G$ ise $H' \subseteq H \cap G'$ olduğunu gösteriniz.

**19)** $N \lhd G$ ve $N \cap G' = \{e\}$ ise $N \subseteq M(G)$ olduğunu gösteriniz.

**21)** $G$ bir grup ve $N \lhd G$ olsun. Eğer $x \in G$ ve $|N| = 10$ ise $xN$ nin $G/N$ grubu içindeki mertebesi 3 ise $x$ in mertebesi kaç olabilir ?

**22)** $G$ değişmeli olmayan bir grup ve $p$ bir asal sayı olmak üzere $|G| = p^3$ olsun. Eğer $M(G) \neq \{e_G\}$ ise $|M(G)| = p$ olduğunu gösteriniz.

**23)** $G$ bir sonlu grup ve $N \lhd G$ olsun. Eğer $x \in G$ ve $(|x|, |G/N|) = 1$ ise $x \in N$ olduğunu gösteriniz.

**24)** $Z_{16}^{*}/\langle\overline{7}\rangle$ grubu devirli midir ? Neden?

**25)** $Z_{20}^{*}/\langle\overline{9}\rangle$ grubu devirli midir ? Neden?

**26)** Aşağıdaki önermeler doğru/yanlış mıdır? Doğru ise ispatlayınız, yanlış ise karşıt örnek bularak açıklayınız.

- **i)** Devirli bir grubun her bölüm grubu devirlidir.
- **ii)** Devirli olmayan bir grubun bölüm grubu da devirli değildir.
- **iii)** Değişmeli bir grubun her bölüm grubu da değişmelidir.
- **iv)** Değişmeli olmayan bir grubun her bölüm grubu değişmeli değildir.
- **v)** Sonlu bir grubun her bölüm grubu da sonludur.
- **vi)** Sonsuz bir grubun her bölüm grubu da sonsuzdur.
- **vii)** $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ toplamsal grubunun mertebesi 2 olan elemanı yoktur.
- **viii)** Her $n \in \mathbb{Z}^{+}$ için $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ toplamsal grubunun mertebesi $n$ olan elemanı vardır.
- **ix)** $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ toplamsal grubunun mertebesi 4 olan sonsuz tane elemanı vardır.
- **x)** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mertebesi $n$ olan devirli bir gruptur.