8. HOMOMORFİZMALAR VE İZOMORFİZMALAR

Şimdiye kadar bir gruptan diğer bir gruba tanımlı olan fonksiyonlarla ilgilenmedik. Bu bölüme aşağıdaki tanımla başlayalım.

Tanım 8.1: $(G\,,\,\cdot\,)$ ve $(H,*)$ iki grup ve $f:G\to H$ bir fonksiyon olsun. $\forall a,b\in G$ için $f(a\cdot b)=f(a)*f(b)$ ise f ye G den H ye bir **homomorfizma** denir.

Örnekler 8.2.

1) $f:G\to H$, $\forall a\in G$ için $f(a)=e_H$ ile tanımlı ise f, G den H ye bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya **aşikar homomorfizma** denir.

2) G bir grup ve $\forall a\in G$ için $I(a)=a$ olacak şekilde I birim fonksiyon olsun. Şu halde $\forall a,b\in G$ için $I(ab)=ab=I(a)I(b)$ olduğundan $I:G\to G$ birim dönüşümü homomorfizmadır.

3) $f:Z\to Z$ fonksiyonunu $\forall a\in Z$ için $f(a)=3a$ ile tanımlansın. Şu halde $\forall a,b\in Z$ için $f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$ olduğundan $f:Z\to Z$ fonksiyonu bir homomorfizmadır.

4) G bir grup ve $a\in G$ olsun. $\forall k\in Z$ için $f(k)=a^k$ ile $f:Z\to\langle a\rangle$ fonksiyonunu tanımlayalım. $\forall\, k,m\in Z$ için $f(k+m)=a^{k+m}=a^ka^m=f(k)f(m)$ olduğundan $f:Z\to\langle a\rangle$ fonksiyonu homomorfizmadır. Ayrıca, f nin örten olduğu açıktır.

5) $f:Z\to Z_n$, $f(x)=\overline{x}$ ile tanımlı bir homomorfizmadır. Gerçekten, $\forall x,y\in Z$ için $f(x+y)=\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}=f(x)+f(y)$ olduğundan $f:Z\to Z_n$ bir homomorfizmadır.

6) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $f: GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ fonksiyonunu $f(A) = det(A)$ ile tanımlarsak $\forall A \in GL(n,\mathbb{R})$ için $f(AB) = det(AB) = det(A)det(B)$ olduğundan $f: GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ fonksiyonu bir homomorfizmadır. Ayrıca f bir örten fonksiyondur.

7) G_1 ve G_2 iki grup olmak üzere $G = G_1 \times G_2$ grubunu göz önüne alalım.

$\pi_1(g_1, g_2) = g_1$ ile $\pi_1: G \to G_1$ fonksiyonunu

$\sigma_1(g_1) = (g_1, e)$ ile $\sigma_1: G_1 \to G$ fonksiyonunu

tanımlayalım. Şu halde π_1 örten homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya G_1 üzerine **projeksiyon (izdüşüm)** denir. σ_1 de bir bire-bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya G_1 grubunun G içine **injeksiyonu (içerme)** denir. Benzer şekillerde G_2 üzerine projeksiyon ve $G_2 \to G$ injeksiyonu da vardır.

8). $f: G \to H$ ve $g: H \to K$ iki homomorfizma $g \circ f: G \to K$ da bir homomorfizmadır.

Çözüm. $f: G \to H$ ve $g: H \to K$ iki homomorfizma olsun. $\forall a, b \in G$ için $(g \circ f)(ab) = g(f(ab)) = g(f(a)f(b)) = g(f(a))g(f(b)) = (g \circ f)(a)(g \circ f)(b)$ olduğundan $g \circ f: G \to K$ da bir homomorfizmadır.

Önerme 8.3. $f: G \to H$ bir homomorfizma olsun. Şu halde,

i) $f(e_G) = e_H$.

ii) $\forall a \in G$ için $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ dir.

iii) $\forall a \in G$ ve $\forall k \in Z$ için $f(a^k) = f(a)^k$ dır.

İspat:

i) $f(e_G)f(e_G) = f(e_G e_G) = f(e_G)$ olduğundan H grubunda kısaltma özelliğini kullanırsak $f(e_G) = e_H$ elde ederiz.

ii) $\forall a \in G$ için $f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e_G) = e_H$ olduğundan $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ elde ederiz.

iii) $k = 0$ ise $f(a^0) = f(e_G) = e_H = f(e_G)^0$ elde ederiz. Eğer iii) ifadesi bir $k \geq 0$ için doğru ise $f(a^{k+1}) = f(aa^k) = f(a)f(a^k) = f(a)f(a)^k = f(a)^{k+1}$ olur. Böylece tümevarım dan iii) ifadesi her $k \geq 0$ için doğrudur. Şimdi $k < 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer $m > 0$ olmak üzere $k = -m$ olsun. Şu halde ii) den

$$f(a^k) = f[(a^m)^{-1}] = [f(a)^m]^{-1} = f(a)^k$$

elde ederiz. Sonuç olarak $\forall k \in Z$ için $f(a^k) = f(a)^k$ dır.

Sonuç 8.4. $f: G \to H$ bir grup homomorfizması olsun. Eğer $g \in G$ nin mertebesi sonlu ise $f(g)$ nin de mertebesi sonludur ve $|f(g)|||g|$ dir.

İspat. $|g| = n$ ise $g^n = e$ ve böylece $f(g)^n = f(g^n) = f(e_G) = e_H$ dır. Bundan dolayı $|f(g)||n$ ve böylece $|f(g)|||g|$ dir.

G ve G_1 iki grup olsun. $f: G \to G_1$ ve $g: G \to G_1$ fonksiyolarının eşit olduğunu göstermek için $\forall a \in G$ için $f(a) = g(a)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 8.5 de $f: G \to G_1$ ve $g: G \to G_1$ fonksiyoları homomorfizma olmak üzere G nin bir üreteç kümesi X olmak üzere $\forall a \in X$ için $f(a) = g(a)$ ise $f = g$ olduğunu göstereceğiz.

Teorem 8.5. $f: G \to G_1$ ve $g: G \to G_1$ iki homomorfizma ve $G = \langle X \rangle$ (Yani G grubu X kümesi tarafından üretilmiş) olsun. Şu halde

$$f = g \Leftrightarrow \forall x \in X \; için \; f(x) = g(x)$$

olmasıdır.

İspat. $f = g$ ise $\forall x \in X \; için \; f(x) = g(x)$ olduğu açıktır. Şimdi $\forall x \in X \; için \; f(x) = g(x)$ olduğunu kabul edelim ve $a \in G$ olsun. Şu halde her $1 \leq i \leq n$ için $x_i \in X \; ve \; k \in Z_i$ olmak üzere $a = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ olur. Teorem 8.3 den

$$f(a) = f(x_1)^{k_1} f(x_2)^{k_2} \dots f(x_n)^{k_n} = g(x_1)^{k_1} g(x_2)^{k_2} \dots g(x_n)^{k_n} = g(a)$$

elde ederiz. Bu eşitlik $\forall a \in G$ için doğru olduğu için $f = g$ elde ederiz.

Teorem 8.5 den bir $f: G \to G_1$ homomorfizmasının tam olarak G nin bir üreteci ile belirlenebildiğini görmüş olduk.

Örnekler 8.6.

1) Z_6 grubundan Z_4 grubuna tüm homomorfizmaları bulunuz.

Çözüm. $Z_6 =< \overline{1} >$ ve $f : Z_6 \to Z_4$ bir homomorfizma olsun. Herhangi $\overline{a} \in Z_6$ için $f(\overline{a}) = af(\overline{1})$ olduğundan $f(\overline{1})$ biliniyorsa f yi belirleyebiliriz. $|f(\overline{1})|||\overline{1}| = 6$ ve $|f(\overline{1})||4$ tür. Böylece $|f(\overline{1})||2$, dolayısıyla $f(\overline{1}) = \overline{0}$ veya $f(\overline{1}) = \overline{2}$ elde ederiz.

Şu halde $f(\overline{1}) = \overline{0} \Rightarrow f$ aşikar homomorfizma veya $f(\overline{1}) = \overline{2} \Rightarrow \forall \, \overline{a} \in Z_6$ için $f(\overline{a}) = 2\overline{a}$ sonucunu elde ederiz. Böylece Z_6 grubundan Z_4 grubuna sadece iki tane homomorfizma vardır.

2) Z_{12} grubundan Z_6 grubuna tüm örten homomorfizmaları bulunuz.

Çözüm. $f: Z_{12} \to Z_6$ homomorfizması $f(\bar{1})$ ile belirlidir. f nin örten homomorfizma olması için $|f(\bar{1})| = 6$ olmalıdır. Böylece $Z_6 = \langle f(\bar{1}) \rangle$ olur. Bu ise $f(\bar{1}) = \bar{1}$ veya $f(\bar{1}) = \bar{5}$ ile mümkündür. Şu halde iki tane homomorfizma bulmuş oluruz.

Önerme 8.7. $f : G \to H$ bir homomorfizma olsun.

i) $N < G \Rightarrow f(N) < H$ dir.

ii) $K < H \Rightarrow f^{-1}(K) < G$ dir.

İspat: i) $f(a), f(b) \in f(N) \Rightarrow f(a)f(b)^{-1} = f(a)f(b^{-1}) = f(ab^{-1}) \in f(N)$ dir.

ii) $\forall a, b \in f^{-1}(K)$ ise $f(a), f(b) \in K$ ve $K < H$ olduğundan $f(a)f(b)^{-1} = f(ab^{-1}) \in K$ dır. Böylece $ab^{-1} \in K$ dır.

Önerme 8.8. $f : G \to H$ bir homomorfizma olsun.

i) f örten ve $N \lhd G$ ise $f(N) \lhd H$ dır.

ii) $K \lhd H$ ise $f^{-1}(K) = \{g \in G : f(g) \in K\} \lhd G$ dir.

İspat:

i) f örten ve $N \lhd G$ olsun. Önerme 8.7(i) den $f(N) < H$ dır. Şimdi $f(N) \lhd H$ olduğunu ispatlayalım. f örten olduğundan $\forall h \in H$ için $h = f(g)$ olacak şekilde $g \in G$ olduğunu biliyoruz. Böylece $\forall h \in H$ ve $\forall f(a) \in f(N)$ için $hf(a)h^{-1} = f(g)f(a)f(g)^{-1} = f(gag^{-1}) \in f(N)$ dir.

ii) $K \lhd H$ olsun. Önerme 8.7 den $f^{-1}(K) < G$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca, $\forall a \in G, \forall b \in f^{-1}(K)$ için $f(aba^{-1}) = f(a)f(b)f(a)^{-1} \in K \Rightarrow aba^{-1} \in f^{-1}(K)$ olduğundan $f^{-1}(K) \lhd G$ dir.

Teorem 8.9. (Eşleştirme Teoremi) G ve G' iki grup ve $\varphi: G \to G'$ bir örten homomorfizma olsun. Şu halde

(a) $H < G$ ve $Çek\varphi \subseteq H$ ise $H = \varphi^{-1}(\varphi(H))$ dır.

(b) $H \to \varphi(H)$ dönüşümü ile G nin çekirdeğini içeren alt grupları ile G' nün alt grupları arasında birebir eşleme vardır (Benzer şekilde, G nin çekirdeğini içeren normal alt grupları ile G' nün normal alt grupları arasında bire-bir eşleme vardır).

İspat. $(\boldsymbol{a})$ $H \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(H))$ olduğu açıktır. Şimdi $x \in \varphi^{-1}(\varphi(H))$ alalım. Böylece

$$\begin{aligned} \varphi(x) \in \varphi(H) &\Rightarrow bir\ h \in H\ \ için\ \varphi(x) = \varphi(h) \\ &\Rightarrow \varphi(xh^{-1}) = \varphi(e_G) \Rightarrow xh^{-1} \in Çek\varphi \\ &\Rightarrow Çek\varphi \subseteq H \quad \text{olduğundan } xh^{-1} \in H \\ &\Rightarrow x \in H \end{aligned}$$

elde ederiz. Sonuç olarak $H = \varphi^{-1}(\varphi(H))$ dır.

$(\boldsymbol{b})$ $H' < G'$ olduğundan Önerme 8.7 den $\varphi^{-1}(H') < G$ dir ve $Çek\varphi \subseteq \varphi^{-1}(H')$ dir . Böylece (a) dan $\varphi(\varphi^{-1}(H')) = H'$ olur. Bundan dolayı $H \rightarrow \varphi(H)$ dönüşümü örtendir. G nin çekirdeğini içeren herhangi H_1 ve H_2 alt grupları için $\varphi(H_1) = \varphi(H_2)$ olsun. Böylece $\varphi^{-1}(\varphi(H_1)) = \varphi^{-1}(\varphi(H_2))$ elde ederiz. Şu halde (a) dan $H_1 = H_2$ dir.

Sonuç 8.10. G bir grup ve $N \lhd G$ olsun. G/N nin herhangi bir H' alt grubu $H' = H/N$ formundadır. Ayrıca, $H \lhd G \Leftrightarrow H/N \lhd G/N$ dir.

İspat. $\varphi(x) = xN$ ile tanımlı $\varphi: G \rightarrow G/N$ doğal homomorfizmasını göz önüne alalım. Bu homomorfizma için $Çek\varphi = N$ dir. Teorem 8.9 dan G nin N yi içeren $H' = \varphi(H) = H/N$ olacak şekilde tek bir H alt grubu vardır.

Örnek 8.11. $|a| = 12$ olmak üzere $G = \langle a \rangle$ olsun. Eğer $K = \langle a^6 \rangle$ ve $K_1 = \langle a^4 \rangle$ ise, G/K nın alt grupları $\langle a^2 \rangle/K$, $\langle a^3 \rangle/K$, K dır. Benzer şekilde G/K_1 grubunun alt grupları $\langle a^2 \rangle/K_1$ ve K_1 dir.

Tanım 8.12. **a)** G bir grup ve $N \lhd G$ olsun. Eğer $N \neq G$ ve her $N \subseteq H$ olacak şekilde her $H \lhd G$ için $H = N$ veya $H = G$ oluyorsa N ye **maksimal alt grup** denir.

b) Bir G grubunun öz normal alt grubu yoksa G ye **basit grup** denir.

Şu halde Sonuç 8.10 dan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 8.13. G bir grup ve N de öz normal alt grubu olsun. Şu halde N nin maksimal normal alt grup olması için gerek ve yeter koşul G/N nin basit grup olmasıdır.

Tanım 8.14 $f: G \rightarrow H$ bir homomorfizma ise $Çekf = \{a \in G: f(a) = e_H\}$ kümesine f homomorfizması nın **çekirdeği** denir. Ayrıca $e_G \in Çekf$ olduğundan $Çekf \neq \emptyset$ olur.

Önerme 8.15. $f:G\to H$ bir homomorfizma ise $Çekf \lhd G$ dir.

İspat. $\forall a,b \in Çekf$ için $f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} = e_H e_H^{-1} = e_H$ olduğundan $ab^{-1} \in Çekf$ dir. Şu halde $Çekf < G$ dir. Şimdi $Çekf \lhd G$ olduğunu gösterelim. $\forall g \in G, \forall a \in Çekf$ için $f(gag^{-1}) = f(g)f(a)f(g)^{-1} = f(g)e_H f(g)^{-1} = f(g)f(g)^{-1} = e_H$ olduğundan $Çekf \lhd G$ olur.

Önerme 8.16. $f:G\to H$ homomorfizmasının 1-1 olması için gerek ve yeter koşul $Çekf = \{e_G\}$ olmasıdır.

İspat:

$\Rightarrow$: f, 1-1 olsun. Önerme 5.3 e göre $a \in Çekf \Rightarrow f(a) = e_H = e_G \Rightarrow a = e_G$ bulunur. Buradan $Çekf = \{e_G\}$ dir.

$\Leftarrow$: $Çekf = \{e_G\}$ olsun. $a,b \in G$ için

$f(a) = f(b) \Rightarrow f(a)f(b)^{-1} = e_H \Rightarrow ab^{-1} \in çekf \Rightarrow ab^{-1} = e_G \Rightarrow a = b \Rightarrow f$, 1-1 dir.

Teorem 8.17. G bir grup ve $K \lhd G$ olsun.

(a) $f(a) = Ka$ ile tanımlı $f: G \to G/K$ fonksiyonu örten homomorfizmadır.

(**b**) $G = \langle a \rangle$ devirli grup ise G/K grubu da devirlidir($G/K = \langle Ka \rangle$).

İspat. (a) f nin örten olduğu açıktır. Ayrıca $\forall\, a,b \in G$ için $f(a)f(b) = KaKb = Kab = f(ab)$ olduğundan f homomorfizmadır.

(b) $G = \langle a \rangle = \{a^k : k \in Z\}$ olsun. Şu halde G/K nın her elemanı $k \in Z$ olmak üzere Ka^k şeklindedir. Böylece (a) daki dönüşümden $Ka^k = f(a^k) = f(a)^k = (Ka)^k$ olduğundan $G/K = \langle Ka \rangle$ elde ederiz.

Not 8.18. Teorem 8.12(a) dan daha genel olarak bir devirli grubun homomorf görüntüsünün de bir devirli grup olduğunu söyleyebiliriz. Gerçekten, $G = \langle a \rangle$ ve $f: G \to H$ ise $f(G) = \langle f(a) \rangle$ olduğunu gösterelim : $f(a) \in f(G)$ olduğundan $\langle f(a) \rangle \subseteq f(G)$ dir. Tersine, $x \in f(G)$ ise $x = f(b)$ olacak şekilde $b \in G$ vardır.Fakat $b \in G = \langle a \rangle$ olduğundan $b = a^k$ olacak şekilde $k \in Z$ vardır. Böylece, $x = f(b) = f(a^k) = f(a)^k \in \langle f(a) \rangle$ elde ederiz.

Tanım 8.19. G ve H iki grup ve $f: G \to H$ bir fonksiyon olsun. Eğer

(i) f bire-bir ve örten,

(ii) f homomorfizma

koşulları sağlanyorsa f ye G ile H arasında bir **izomorfizma** denir. Eğer G ve H grupları arasında bir izomorfizma varsa bu gruplara **izomorf gruplar** denir ve $G \cong H$ ile gösterilir.

Örnekler 8.20.

1) $2Z = \{2k : k \in Z\}$ çift sayıların toplamsal grubu olmak üzere $Z \cong 2Z$ dir.

Çözüm. $f(k) = 2k$ ile tanımlı $f: Z \to 2Z$ fonksiyonun bire-bir ve örtendir. Ayrıca,

$$\forall k, m \in Z \text{ için } f(k+m) = 2(k+m) = 2k + 2m = f(k) + f(m)$$

olduğundan f homomorfizmadır. Böylece f izomorfizma olduğundan $Z \cong 2Z$ dir. Aslında bu örneğe benzer olarak her sıfırdan farklı n tam sayısı için $Z \cong nZ$ olduğunu gösterebiliriz.

2) Bilinen matris çarpımı altında bir grup olan $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in Z \right\}$ kümesi, Z toplamsal grubuna izomorftur.

Çözüm. Her $n \in Z$ için $f(n) = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ile tanımlı $f: Z \to G$ fonksiyonunu göz önüne alalım. f nin bire-bir ve örten olduğu açıktır. Ayrıca,

$$\forall m, n \in Z \text{ için } f(m+n) = \begin{bmatrix} 1 & m+n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = f(m)f(n)$$

olduğundan f bir homomorfizmadır. Böylece f bir izomorfizmadır ve $G \cong Z$ dir.

3) Reel sayıların toplamsal grubu $\mathbb{R}$ ile $\mathbb{R}^+$ çarpımsal grubu izomorftur.

Çözüm. $f(r) = e^r$ ile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu tanımlayalım.

f bire-bir : $\forall r, s \in \mathbb{R}$ için $f(r) = f(s) \Rightarrow e^r = e^s \Rightarrow r = ln(e^r) = ln(e^s) = s$ dir.

f örten : $t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow t > 0 \Rightarrow ln(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow f\big(ln(t)\big) = e^{ln(t)} = t$ dir.

f homomorfizma : $\forall r, s \in \mathbb{R}$ için $f(r+s) = e^{r+s} = e^r e^s = f(r)f(s)$ dir.

Böylece f izomorfizma dır ve $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^+$ dır.

4) Reel sayıların toplamsal grubu $\mathbb{R}$ ve $f(r) = 2r + 1$ ile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım. f nin bire-bir ve örten olduğu açıktır. Ancak $f(1+1) = 5$ ve $f(1) + f(1) = 6$ olduğundan f izomorfizma değildir.

5) $\mathbb{Q}$ toplamsal rasyonel sayılar grubu ile $\mathbb{Q}^*$ çarpımsal grubu izomorf değildir.

Çözüm. $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^*$ fonksiyonu bir izomorfizma olsun. Böylece f izomorfizma olduğundan $f(q) = 2$ olacak şekilde $q \in \mathbb{Q}$ vardır. Şimdi $f\left(\frac{1}{2}q\right) = a$ olduğunu kabul edelim. f homomorfizma olduğundan $a^2 = f\left(\frac{1}{2}q\right) f\left(\frac{1}{2}q\right) = f\left(\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q\right) = f(q) = 2$ olur. Fakat $a^2 = 2$ olacak şekilde rasyonel sayı olmadığından bu bir çelişkidir. Böylece f izomorfizma olamaz.

6) Her sonsuz devirli grup Z ile izomorftur.

Çözüm. $G = \langle x \rangle$ bir sonsuz devirli grup olmak üzere, $f(n) = x^n$ ile tanımlanan $f : Z \to G$ fonksiyonunu düşünelim. Bu tanımladığımız f fonksiyonu bir izomorfizmadır. Gerçekten,

f 1-1 dir : $\forall a, b \in Z$ için $f(a) = f(b) \Rightarrow x^a = x^b \Rightarrow a = b$.

f örtendir : $\forall\, x^n \in G$ için $f(n) = x^n$ olacak şekilde $n \in Z$ bulunabilir.

f homomorfizmadır : $\forall n, m \in Z$ için $f(n+m) = x^{n+m} = x^n x^m = f(n) f(m)$ dir.

Sonuç olarak $Z \cong G =< x >$ bulunur.

7) Mertebesi n olan her devirli grup $(Z_n\,, +)$ ile izomorftur.

Çö**züm.** $G = \langle a \rangle$ ve $o(G) = n$ olsun. $f : G \to Z_n$ fonksiyonu nu $f(a^i) = \bar{i}$ ile tanımlayalım.

f 1-1 dir : $f(a^i) = f(a^j) \Leftrightarrow \bar{i} = \bar{j} \Leftrightarrow n|(i-j) \Leftrightarrow a^{i-j} = e \Leftrightarrow a^i = a^j$

f örtendir : G ve Z_n nin mertebesi aynı olduğundan f örtendir.

f homomorfizmadır : $f(a^i a^j) = f(a^{i+j}) = \overline{i+j} = \bar{i} + \bar{j} = f(a^i) + f(a^j)$ olur.

Böylece $G \cong Z_n$ dir.

8) G grubunun mertebesi $(m, n) = 1$ olmak üzere mn olsun. Şu halde H ve K, sırasıyla G grubunun mertebesi m ve n alt grupları iseler $G = HK \cong H \times K$ dır.

Çözüm. G devirli grup olduğundan mertebesi m olan tek bir H alt grubu ve mertebesi n olan tek bir K alt grubu vardır. Langrange teoreminden $H \cap K = \{e\}$ ve böylece $|HK| = |H||K| = mn$ bir. Böylece $G = HK \cong H \times K$ olur.

9) $(m, n) = 1$ ise $Z_m \times Z_n \cong Z_{mn}$ dir.

Çözüm. Z_m ve Z_n sırasıyla $m.$ *ve* $n.$ mertebeden devirli gruplardır. Ayrıca, $(m, n) = 1$ olduğundan $Z_m \times Z_n$ mertebesi mn olan devirli gruptur. Böylece mertebesi mn olan devirli gruplar izomorf olduğundan $Z_m \times Z_n \cong Z_{mn}$ dir.

Örnek 8.21. G ve H iki devirli grup ve $|G| = 9, |H| = 3$ olsun. G ve $H \times H$ gruplarının ikisinin de mertebesi 9 olmasına rağmen izomorf olmadığını gösteriniz.

Çözüm. $G = \langle a \rangle$ ise $a^3 \neq e$ dir. Fakat $\forall\, x \in H \times H$ için $x^3 = e$ dir. Eğer $G \cong H \times H$ olsaydı bu sonucu elde edemezdik. Yani iki grupta yukarıda bulduğumuz farklı özellik oluşmazdı.

Örnek 8.21 den izomorfizmaların çok önemli bir özelliğini elde edebiliriz. Bu özellik de izomorfizmaların grupların cebirsel özelliklerini korumasıdır. Örnek 8.15 de $\forall\, x \in H \times H$ için $x^3 = e$ olması bir cebirsel özelliktir. Böylece $H \times H$ grubuna izomorf olan diğer gruplarda da aynı özellik olmalıdır. Fakat *G* grubunda bu özellik yoktur. Böylece G ve $H \times H$ grupları izomorf olamaz. Herhangi iki grubun izomorf olmadığını cebirsel özelliklerine bakarak söyleyebiliriz. Aşağıda bir *G* grubunun bazı cebirsel özelliklerini listeliyoruz :

(1) *G* nin mertebesi *n* dir.

(2) *G* sonlu gruptur.

(3) *G* değişmeli gruptur.

(4) *G* devirli gruptur.

(5) *G* grubunun mertebesi *n* olan elemanı yoktur.

(6) *G* nin mertebesi *n* olan tam *m* tane elemanı vardır.

Bu listeye daha bir çok örnek eklenebilir. Bu konuyu aşağıdaki teoremle özetleyebiliriz.

Teorem 8.22. *G* ve *H* izomorf gruplar iseler *G* ve *H* nin cebirsel özellikleri aynıdır.

Böylece *G* değişmeli grup ve $G \cong H$ ise *H* grubu da değişmelidir. Benzer şekilde, *G* devirli grup ve $G \cong H$ ise *H* grubu da devirlidir.

Örnek 8.23. $(\mathbb{Q},+)$ grubu $(\frac{\mathbb{Q}}{Z},+)$ grubuna izomorf değildir.

İspat. $(\mathbb{Q},+)$ grubunda sıfırdan farklı her elemanın mertebesi sonsuzdur. Oysa bu cebirsel özellik $(\frac{\mathbb{Q}}{Z},+)$ grubunda sağlanmaz. Her $\frac{a}{b} + Z \in \frac{\mathbb{Q}}{Z}$ için, $b\left(\frac{a}{b} + Z\right) = a + Z = Z$ olduğundan $\frac{\mathbb{Q}}{Z}$ grubunda her elemanın mertebesi sonludur. Şu halde $(\mathbb{Q},+)$ile $(\frac{\mathbb{Q}}{Z},+)$ izomorf değildir.

Örnek 8.24. $Z_4 \times Z_4$ ve $Z_8 \times Z_2$ gruplarının her ikisi de mertebesi 16 olan değişmeli gruplardır. Ancak bu iki grup birbirine izomorf değildir.

İspat. $f: Z_4 \times Z_4 \rightarrow Z_8 \times Z_2$ bir izomorfizma olduğunu varsayalım. O halde f örten olduğundan $y = (7,1) \in Z_8 \times Z_2$ elemanına karşılık $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in Z_4 \times Z_4$ bulunur. Her $x \in Z_4 \times Z_4$ için $|x| = 1,2,4$ olduğu açıktır. Ayrıca Sonuç 8.4 ten $|f(x)|\,|\,|x|$ olması gerekir. Oysa $|f(x)|$=8 olduğundan bu bir çelişkidir. O halde böyle bir f izomorfizması bulunamaz.

Önerme 8.25. İzomorfizma bağıntısı $\cong$ gruplar için bir denklik bağıntısıdır.

İspat. i) Bir grubun kendisi üzerine birim dönüşümü, bir izomorfizma olduğundan kendisi ile izomorftur $(G \cong G)$.

ii) $G \cong H \Rightarrow H \cong G$ dir. Gerçekten, $f: G \rightarrow H$ bir izomorfizma olsun. f fonksiyonu 1-1 ve örten olduğundan $f^{-1}: H \rightarrow G$ de 1-1 ve örtendir. Ayrıca, f^{-1} bir homomorfizmadır. Gerçekten, $\forall a,b \in H$ için $f^{-1}(ab) = f^{-1}(f(x)f(y)) = f^{-1}(f(xy)) = xy = f^{-1}(a)f^{-1}(b)$ dır.

iii) $G \cong H$ ve $H \cong K \Rightarrow G \cong K$ dır. Gerçekten,

$f: G \rightarrow H$ ve $g: H \rightarrow K$ grup izomorfizmaları ise $gf: G \rightarrow K$ de 1-1 örten bir homomorfizma olduğu açıktır. O halde grup izomorfizmasıdır.

Not 8.26. Eğer G ve H mertebeleri n olan iki devirli grup iseler Örnek 8.14(7) den $G \cong Z_n$ ve $H \cong Z_n$ ve böylece Önerme 8.17 den $G \cong H$ dır.

Tanım 8.27. G bir grup olmak üzere G den G ye bir izomorfizmaya G nin bir **otomorfizması** denir.

Teorem 8.28. Bir G grubunun tüm otomorfizmalarından oluşan küme fonksiyonlardaki bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu grubu $\boldsymbol{Aut(G)}$ ile göstereceğiz.

İspat. Önerme 8.18 den G den G ye tüm izomorfizmaların kümesi G den G ye tüm bire-bir ve örten fonksiyonların kümesi S_G nin alt kümesi olduğunu görebiliriz.

Örnek 8.29. G değişmeli grup ise $\forall g \in G$ için $f(g) = g^{-1}$ ile tanımlı $f: G \rightarrow G$ fonksiyonu G nin bir otomorfizmasıdır.

Örnek 8.30. G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere $\forall a \in G$ için $f_a(g) = aga^{-1}$ ile $f: G \to G$ yi tanımlayalım. Şu halde,

(1) $\forall a \in G$ için f_a fonksiyonu G nin bit otomorfizmasıdır.

(2) $\{ f_a : a \in G \} < Aut(G)$.

Çözüm. **(1)** $\forall a \in G$ için f_a fonksiyonu nun bire-bir ve örten olduğu açıktır. Şimdi f_a nın homomorfizma olduğunu gösterelim. Eğer $g, h \in G$ ise $f_a(g)f_a(h) = aga^{-1}aha^{-1} = agha^{-1} = f_a(gh)$ olduğundan f_a homomorfizmadır.

(2) $b \in G$ olmak üzere $\forall g \in G$ için $f_a f_b(g) = f_a(bgb^{-1}) = a(bgb^{-1})a^{-1} = abg(ab)^{-1} = f_{ab}(g)$ olduğundan $f_a f_b = f_{ab}$ dir. Ayrıca $f_e = I$ (I:Birim fonksiyon) olduğundan $f_a^{-1} = f_{a^{-1}}$ elde ederiz ve böylece $\{ f_a : a \in G \} < Aut(G)$ dir.

Tanım 8.31. G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere $\forall a \in G$ için $f_a(g) = aga^{-1}$ ile tanımlı $f: G \to G$ otomorfizmasına bir **iç otomorfizma** denir ve $\mathbf{Inn}(\boldsymbol{G})$ ile gösterilir.

Örnek 8.30 dan $Inn(G) < Aut(G)$ dir.

Örnek 8.32. G mertebesi n olan devirli grup ise $Aut(G) \cong Z_n^*$ dir.

Çözüm. $G = \langle a \rangle$ ve $|a| = n$ olsun. Şimdi $f: G \to G$ nin bir otomorfizma olduğunu kabul edelim. Bir devirli grubun homomorf görüntüsü de devirli olduğundan $f(G) = G$ de devirlidir ve $f(G) = G = \langle f(a) \rangle$ dır. G grubunun üreteçleri $0 \leq k < n$ ve $(k, n) = 1$ olmak üzere a^k lar olduğundan $f(a) = a^k$ dır. Böylece G grubunun $\phi(n)$ tanedir. Şimdi $G = \langle a \rangle$ nın $f(a) = a^k$ ile tanımlı her f otomorfizması için $\varphi(f) = \bar{k}$ ile $\varphi: Aut(G) \to Z_n^*$ fonksiyonunu tanımlayalım. Şu halde φ bir izomorfizmadır. Gerçekten,

φ homomorfizmadır : $\forall f, g \in Aut(G)$ için $0 \leq k < n$ ve $(k, n) = 1$ olmak üzere $f(a) = a^k$ ve $g(a) = a^t$ ise $(fg)(a) = a^{kt}$ dir ve böylece $\varphi(fg) = \overline{kt} = \bar{k}\,\bar{t} = \varphi(f)\varphi(g)$ dir.

φ bire-birdir : $\forall f, g \in Aut(G)$ için $0 \leq k < n$ ve $(k, n) = 1$ olmak üzere $f(a) = a^k$ ve $g(a) = a^t$ ise $\varphi(f) = \varphi(g) \Rightarrow \bar{k} = \bar{t} \Rightarrow k = t \Rightarrow f = g$ dir.

φ örtendir : $\bar{k} \in Z_n^*$ ise $f(a) = a^k$ ile tanımlı $f \in Aut(G)$ tanımlanabilir ve $\varphi(f) = \bar{k}$ olur.

Örnek 8.33. Sonsuz devirli bir grubun sadece iki tane otomorfizması vardır.

Çözüm. $G=\langle a\rangle$ ve $f: G\to G$ bir otomorfizma olsun. G devirli olduğundan homomorf resmi $f(G)=G$ de devirlidir ve $f(G)=G=\langle f(a)\rangle$ dır. $G=\langle a\rangle$ sonsuz devirli grup ve üreteçleri a ve a^{-1} olduğundan G nin otomorfizmaları $f(a)=a$ birim fonksiyonu ve $f(a)=a^{-1}$ dir.

X bir küme olmak üzere X in kendi üzerine bire-bir ve örten fonksiyonlarının kümesi $S(X)$ in bileşke işlemi altında grup olduğunu biliyoruz. $S(X)$ grubunun alt gruplarına bir dönüşüm grubu denir.

Teorem 8.34. (Cayley Teoremi) Her grup bir dönüşüm grubuna izomorftur.

İspat. G bir grup ve $a\in G$ olsun. $\forall x\in G$ için $f_a(x)=ax$ ile $f_a: G\to G$ fonksiyonunu tanımlayalım. $\forall x,y\in G$ için $f_a(x)=f_a(y)\Rightarrow ax=ay\Rightarrow x=y$ olduğundan f_a bire-bir dir. Ayrıca $\forall\, y\in G$ için $f_a(x)=y$ olacak şekilde $x=a^{-1}y\in G$ bulunabildiğinden f_a örtendir. Şimdi, $\varphi(a)=f_a$ ile $\varphi: G\to G$ fonksiyonunu tanımlayalım. Tanımdan $\forall a,b,x\in G$ için $f_{ab}(x)=(ab)x=a(bx)=af_b(x)=f_a\big(f_b(x)\big)=(f_a{}^\circ f_b)(x)$ olduğundan $f_a{}^\circ f_b=f_{ab}$ elde ederiz. Böylece $\varphi(ab)=f_{ab}=f_a{}^\circ f_b=\varphi(a)^\circ\,\varphi(b)$ sağlandığından φ bir homomorfizmadır. Ayrıca,

$$\forall a,b\in G \text{ için } \varphi(a)=\varphi(b)\Rightarrow f_a=f_b\Rightarrow f_a(e)=f_b(e)\Rightarrow a=b$$

olduğundan φ bire-bir dir. Sonuç olarak $G\cong\varphi(G)<S(G)$ elde ederiz.

Sonuç 8.35. Mertebesi n olan her grup S_n grubunun alt grubuna izomorftur.

Not 8.36. Sonuç 8.28 den mertebesi n olan her grup S_n grubunun bir alt grubuna izomorftur. Şu halde mertebesi n olan bir grupla çalışırken S_n grubunda da çalışmamız yeterlidir. S_n çalışmak ilk olarak daha kolay gözükse de her zaman kolay değildir. Örneğin $|S_{10}|=3.628.800$ olduğundan mertebesi 10 olan grubu S_{10} grubunda belirlemek zordur.

Sorular.

1. Aşağıdaki her bir durumda α nın homomorfizma olduğunu gösteriniz ve bire-bir ve örten olup lmadığına karar veriniz.

   (a) $\forall\, r\in\mathbb{R}$ için $\alpha(r)=\begin{bmatrix}1 & r\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ile tanımlanan $\alpha:\mathbb{R}\to GL_2(\mathbb{R})$.

(b) G grubunda $\forall g \in G$ için $\alpha(g) = (g, g)$ ile tanımlanan $\alpha: G \to G \times G$

2. G bir grup ve $\forall g \in G$ için $\alpha(g) = g^{-1}$ ile $\alpha: G \to G$ fonksiyonunu tanımlayalım.G nin değişmeli olması için gerek ve yeter koşul α nin homomorfizma olmasıdır. İspatlayınız.

3. $m \in Z$ ve G değişmeli grup olsun. $\forall a \in G$ için $\alpha(a) = a^m$ ile tanımlanan $\alpha: G \to G$ fonksiyonunu homomorfizma olduğunu gösteriniz.

4. (a) Z den Z ye tüm grup homomorfizmalarını belirleyiniz.
   (b) Bu homomorfizmaların kaç tanesi örtendir ?

5. Z_{16} grubundan Z_{15} grubuna tüm homomorfizmaları bulunuz.

6. Aşağıdaki her bir durumda $\alpha: G \to G_1$ fonksiyonunun izomorfizma olup olmadığını belirleyiniz.

(a) $G = G_1 = \mathbb{R},\ \alpha(x) = 2x$

(b) $G = G_1 = Z_5^*\ ,\ \alpha(g) = g^2$

(c) $G = G_1 = Z_7\ ,\ \alpha(g) = 2g$

(d) $G = G_1 = \mathbb{R}^+\ ,\ \alpha(g) = g^2$

(e) $G = G_1 = Z\ ,\ \alpha(n) = 2n$

(f) $G = G_1 = Z_5^*\ ,\ \alpha(g) = g^3$

(h) $G = 2Z, G_1 = 3Z\ ,\ \alpha(2k) = 3k$

(i) $G = \mathbb{R}, G_1 = \mathbb{R}^+,\ \alpha(g) = |g|$

7. i) $G = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\} < GL_2(Z)$ ve

ii) $G \cong \{1, -1, i, -i\}$ olduğunu gösteriniz.

8. $\forall z \in \mathbb{C}$ için $\sigma(z) = \bar{z}$ ile tanımlı $\sigma: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ fonksiyonunun bir otomorfizma olduğunu gösteriniz.

9. G bir grup ve $g, h \in G$ olsun. Şu halde $\langle gh \rangle \cong \langle hg \rangle$ olduğunu gösteriniz.

10. G mertebesi 2 olan bir grup ise $G \times G \cong K_4$ olduğunu gösteriniz. (K_4 : Klein 4-lü grubudur) .

11. $G \cong G_1$ ve $H \cong H_1$ ise $G \times H \cong G_1 \times H_1$ olduğunu gösteriniz.

12. $0 \neq n \in Z$ ve $0 \neq m \in Z$ olmak üzere $nZ \cong mZ$ olduğunu gösteriniz.

13. Z_{10}^* grubunun Z_{12}^* grubuna izomorf olmadığını gösteriniz.

14. $\mathbb{R}$ grubunun $\mathbb{R}^*$ grubuna izomorf olmadığını gösteriniz.

15. $n \geq 2$ tam sayı olmak üzere n^2 mertebeli izomorf olmayan iki grup bulunuz.

16. Z ve $\mathbb{Q}$ grupları izomorf mudur? Neden?

17. $Z_{14}^* \cong Z_{18}^*$ olduğunu gösteriniz.

18. $|a| = |b| = 6$ olmak üzere $G = \langle a \rangle$ ve $G_1 = \langle b \rangle$ olsun. Şu halde G den G_1 grubuna tanımlı tüm izomorfizmaları bulunuz.

19. G bir grup ve $M(G) = \{e_G\}$ ise $G \cong Inn(G)$ olduğunu gösteriniz.

20. $Z_{15}^* \cong Z_{16}^*$ olduğunu gösteriniz.

21. $G = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ ve $H = \left\{\begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ olmak üzere toplama işlemi altında iki grubun izomorf olduğunu gösteriniz.

22. S_4 grubunun D_{12} grubuna izomorf olmadığını gösteriniz.

23. $Aut(Z)$ ve $Aut(Z_n)$ yi belirleyiniz.

24. $Aut(G) \cong Aut(H)$ olacak şekilde izomorf olmayan iki G ve H bulunuz.

25. $Z_7^* \times Z_{11}^* \cong Z_6 \times Z_{10}$ olduğunu gösteriniz.

26. Z_6, Z_{10}^* ve Z_{18}^* gruplarının birbirlerine izomorf olduğunu gösteriniz.

27. $Inn(g) \lhd Aut(G)$ olduğunu gösteriniz.

28. Aşağıdaki her bir durumda G nin tüm maksimal alt gruplarını bulunuz.

a) $G = Z$

b) G devirli grup ve $o(G) = n$ dir.

c) $G = D_{10}$

d) G=Q

29. G bir grup ve $H \lhd G,\ K \lhd G$ olsun. O halde $\frac{H}{H \cap K} \times \frac{K}{H \cap K} \cong \frac{HK}{H \cap K}$ olduğunu gösteriniz.