

Matematiksel Modelleme Sürecini Açıklayan Farklı Yaklaşımlar *

Arş. Gör. Çağlar Naci HİDİROĞLU
Pamukkale Üniversitesi
Eğitim Fakültesi
caglarr.naci@gmail.com

Doç. Dr. Esra BUKOVA GÜZEL
Dokuz Eylül Üniversitesi
Buca Eğitim Fakültesi
esra.bukova@deu.edu.tr

Özet: Çalışmanın amacı, farklı matematiksel modelleme süreci yaklaşımlarını ele alarak, çalışmalardaki modelleme süreçlerinin aralarındaki farklılıkları ve benzerlikleri ortaya koymaktır. Literatür taraması niteliğindeki çalışmada, ilgili literatür “matematiksel modelleme sürecini şekillendiren temel bileşenler ve basamaklar nelerdir?” ve “temel basamakları özel kılan bilişsel aktiviteler nasıl şekillenmektedir?” soruları çerçevesinde incelenmiştir. Matematiksel ve gerçek yaşam arasındaki geçiş, matematiksel modeli kurma, çözme gibi basamaklar süreçteki önemli basamaklar olarak karşımıza çıkmaktadır. İlk çalışmalardaki farklı modelleme süreçlerinde genellikle temel basamaklar ön plandayken; son yıllardaki modelleme süreçlerinde basamakların yanı sıra bileşenlerin de dikkate alındığı görülmektedir. Modelleme sürecindeki bilişsel süreçlerin açıklanması, problem çözme sürecindeki zorlukları ortaya çıkardığı gibi, modelleme problemleriyle gerçek yaşam ve matematiğin ilişkilendirilmesini, bilişsel ve üst bilişsel becerilerin ortaya çıkarılmasını veya geliştirilmesini sağlayacak bilinçli tasarlanan öğretim ortamlarının yaratılmasında büyük önem taşımaktadır. Çalışma modelleme sürecine ve modelleme problemlerinin kullanımına dair kapsamlı bir bakış açısı getireceği düşünülmektedir.

Anahtar Sözcükler: Matematiksel modelleme, bilişsel modelleme, bilişsel aktiviteler, üst biliş, literatür taraması.

Different Approaches Clarifying Mathematical Modeling Process

Abstract: The purpose of the study is to reveal the differences and similarities between modeling process by dealing with mathematical modeling process in literature. In this study, literature review, the literature in question was examined through the questions: “What are the basic components and steps in the mathematical modeling process?” and “How to be shaped mental activities in occurring basic steps?”. Transition between mathematical and real world and the steps such as making and solving the mathematical model are important part of modeling process. It was seen that the basic components of mathematical modeling were generally considered in initial studies but in last studies it was examined the components of mathematical modeling as well as basic steps. Explaining the mental activities in modeling cycle exposes blockages of problem solving process. Besides, they are great importance for creating learning environments providing relation between real world and mathematics, and occurrence and improvement of cognitive and meta-cognitive skills. It is thought that this study may bring a comprehensive perspective related to use of modeling problems and modeling process.

Key Words: Mathematical modeling, cognitive modeling, mental activities, meta-cognitive, literature review.

* Bu çalışma birinci yazarın ikinci yazar danışmanlığında yürüttüğü ve Dokuz Eylül Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri birimi tarafından desteklenen (No. 2011.KB.EGT.009) “Teknoloji Destekli Ortamda Matematiksel Modelleme Problemlerinin Çözüm Süreçlerinin Analiz Edilmesi: Yaklaşım ve Düşünme Süreçleri Üzerine Bir Açıklama” isimli yüksek lisans tezinin bir bölümünden oluşturulmuştur.

1. GİRİŞ

Matematiksel modelleme, bir gerçek yaşam durumunun fiziksel, sembolik ya da soyut modelini oluşturma sürecidir (Lesh ve Doerr, 2003; Sriraman, 2005). Lingefjärd (2006), matematiksel modellemenin bir problem durumunu açıklamak için model oluşturmaktan çok daha fazlasını içeren bir süreç olduğunu vurgulayarak modelleme sürecinin karmaşık yapısına vurgu yapmaktadır. Lesh ve Doerr (2003), matematiksel modelleme sürecinde öğrencilerin kullandıkları zihinsel araçların tamamını zihinsel modeller olarak adlandırmaktadır. Lesh ve Doerr'e (2003) göre matematiksel modeller, gerçek yaşam problem durumunun yorumlanmasına, çözümlenmesine olanak sağlayan zihindeki yapıların matematiksel bir forma dönüştürülmüş dış temsilleridir. Bir başka deyimle, matematiksel modelleme süreci, zihinsel modelleme sürecini gerektiren bir süreçtir.

Değişen dünyamızda, matematiği anlayabilen, günlük yaşamında matematik bilgisini ve matematiksel becerilerini kullanabilen insan ihtiyacı giderek artmaktadır ve bu yeterliliklere sahip bireylerin geleceği şekillendirmede daha etkin roller alacağı kaçınılmazdır (MEB, 2006). Bazı araştırmacılar (Berry ve Houston, 1995; Blum ve Niss, 1991; English ve Watters, 2004; Kaiser; 2005; Lesh ve Doerr, 2003; Lingefjärd, 2000; Schoenfeld, 1992) öğrencilerin okul dışındaki ve gelecekteki yaşamlarında problem çözme becerisi gelişmiş bireyler olarak yetişmelerini sağlamak için, rutin olmayan gerçek yaşam durumlarına çözüm üretmeyi içeren matematiksel modelleme üzerine önemli araştırmalar yapmaktadır. Bu çalışmada, matematik öğretiminde önemli bir yeri olan matematiksel modelleme süreci ve bileşenlerine ilişkin farklı bakış açılarına yer verilmektedir. Bu sayede, modelleme sürecinde nasıl daha zengin bir ortam yaratılabileceği ve bu sürecin öğrencilerin hangi matematiksel becerilerini geliştirmelerine veya ortaya çıkarmalarına yardımcı olabileceği hakkında kapsamlı bir yanıt verilmeye çalışılmaktadır. Bu doğrultuda, çalışmada literatürdeki önemli çalışmaların (Abrams, 2001; Berry ve Houston 1995; Berry ve Davies, 1996; Blomhøj ve Jensen, 2006; Blum ve Leiß, 2007; Borromeo Ferri, 2006; Cheng 2001; 2006; 2010; Galbraith ve Stillman, 2006; Müller ve Witmann, 1984; Mason, 1988; Schoenfeld, 1985) modelleme sürecine yönelik yaklaşımlarına ve sürecin yapısını açıklayan diğer bazı çalışmalara yer verilmiştir. Son olarak, teknoloji destekli ortamdaki matematiksel modelleme sürecinin bilişsel yapısına ilişkin ayrıntılı bir açıklama sunan kuram (Hıdıroğlu, 2012) açıklanmıştır.

Matematiksel Modelleme Süreci

Pollak (1979) matematiksel modellemenin, matematiğin ve matematiğin dışında kalan dünyanın karşılıklı etkileşimi olduğunu ifade ederek modelleme sürecinin diğer alanlarla

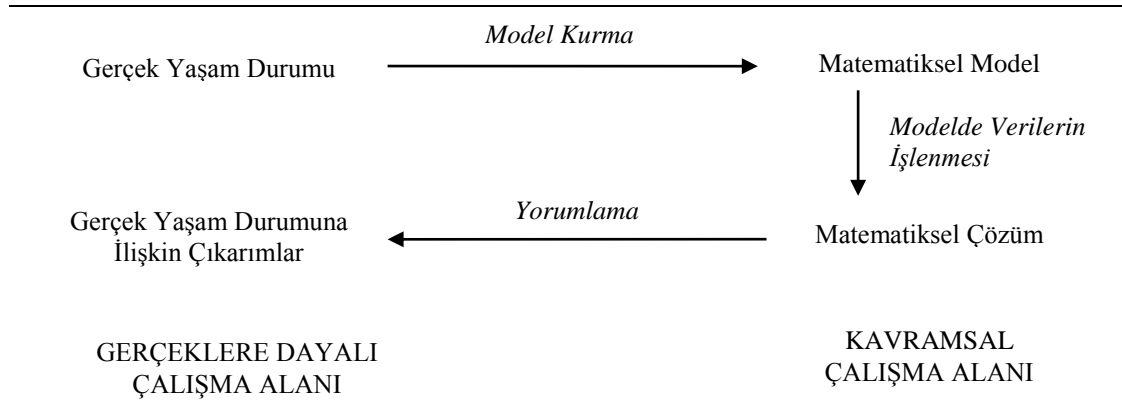
matematik arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmayı gerektirdiğini vurgulamıştır. Bu düşüncesinin matematiksel modelleme süreçlerinin yapısında dikkate alındığı görülmektedir. İlgili alan yazındaki ilk çalışmalardan biri olarak Kapur (1982), matematiksel modelleme sürecini uygun değişkenleri seçme, değişkenler arasındaki bağlantıyı ortaya çıkarma, değişken ve bağlantılara bağlı olarak matematiksel bir model ortaya koyma ve modeli ve uygulamalarını test etme olarak tanımlamaktadır. Kapur'un (1982) çalışması, sürecin karmaşık yapısına ve işleyişine dair ilk açıklamalardan biri olarak göze çarpmaktadır. Matematiksel modelleme üzerine yapılan çalışmalar incelendiğinde sadece matematik eğitimi değil; aynı zamanda matematik, fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik gibi çeşitli alanlarda modellemenin ele alındığı görülmektedir.

Trelinski (1983), Kimya bölümü yüksek lisans öğrencileri üzerinde açık uçlu matematiksel modelleme problemlerini içeren bir çalışma yapmıştır. 223 Kimya öğrencisi ile yaptığı çalışmada, öğrencilerin tek bir çözüme bağlı kaldıklarından ve matematiksel olarak tutarlı ve düzenli bir süreç izlemediklerini belirtmektedir. Ayrıca, Trilenski (1983), çözüm sürecinin başında öğrencilerin matematiksel model için gerekli bazı değişkenleri unuttuklarını, ama sürecin devamında modellerinin eksik olduğunun farkına vararak bu eksikliklerini düzeltmeye çalıştıklarını ifade etmektedir. Trelinski'nin (1983) çalışmasını önemli kılan unsurlardan biri de matematiksel modelleme sürecini, ayrık (discrete), sürekli (continious) ve devam eden (ongoing) bir süreç olarak üçe ayırmış olmasıdır. Bunun temel nedeninin ise, problemlerin yapısının ve öğrencilerin yaklaşımlarının olduğunu ifade etmektedir. Bu çalışma Kapur'un (1982) çalışması ile birlikte, matematiksel modelleme sürecine yönelik yapılan ilk analiz çalışmalarından biri olarak göze çarpmaktadır.

Matematiksel modelleme sürecine ilişkin çalışmalarda (Blum ve Niss, 1989; Lesh, Surber ve Zawojewski, 1983; Müller ve Wittmann, 1984; Schoenfeld, 1985) Polya (1945)'nin ortaya koyduğu problem çözme aşamalarının doğrusal olmadığı vurgulanmakta ve doğrusal olmayan durumların ise matematiksel modelleme sürecinin yorumlama, tahminde bulunma ve doğrulama gibi farklı aşamalarından kaynaklandığı belirtilmektedir. Söz konusu çalışmalarda genel olarak matematiksel modelleme sürecini şekillendiren bilişsel aktiviteler açıklanmakta ve öğrencilerin zorlandıkları durumlar irdelenmektedir.

İlerleyen zamanlardaki çalışmaların bilişsel aktiviteleri ortaya çıkarmanın yanında bilişsel aktiviteler arasındaki geçişleri ve ilişkileri de açıklamayı amaçladığı görülmektedir. Müller ve Witmann (1984), Almanya'daki ilkökul öğrencileriyle yaptıkları çalışmada, modelleme sürecinin üç temel basamaktan meydana geldiğini vurgulamaktadır. Bunlar: model kurma, modelde verileri işleme ve yorumlamadır. Ayrıca bu üç temel basamak için gerekli olan dört

temel bileşeni gerçek yaşam durumu, matematiksel model, matematiksel çözüm ve gerçek yaşam durumuna ilişkin çıkarımlar olarak ifade ederek süreci daha ayrıntılı olarak ele almaya ve temellendirmeye çalışmışlardır. Bunun yanında, Pollak'ın (1979) ifade ettiği gibi, öğrencilerin çözüm sürecinde gerçeklere dayalı ve kavramsal olmak üzere iki farklı çalışma alanında yer aldıklarını ifade etmektedirler. Öğrenciler modelleme sürecinde kavramsal bilgileri ile gerçek yaşam bilgilerini ilişkilendirerek çözüme ulaşmaktadır (bkz. Şekil 1).



Şekil 1: Modelleme Sürecinin Yapısı (Müller ve Wittmann, 1984'den akt. Peter-Koop, 2004)

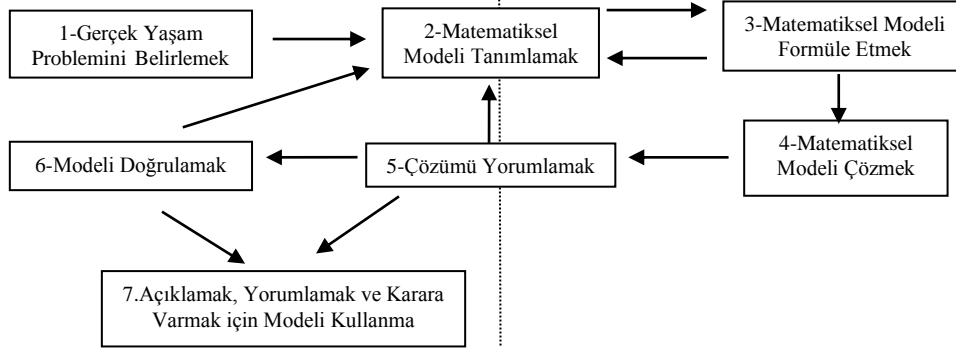
1990'lı yıllara doğru matematiksel modelleme sürecine yönelik çalışmalarda iki farklı amacın benimsendiği görülmektedir. Bazı araştırmacılar (Biccard ve Wessels, 2011; Schoenfeld, 1985 gibi) süreçteki bilişsel aktiviteleri daha kapsamlı olarak ele alırken, bazı araştırmacılar (Berry ve Houston, 1995; Berry ve Davies, 1996; Borromeo Ferri, 2006, Cheng, 2010; Galbraith ve Stillman, 2006; Hıdıroğlu, 2012; Mason, 1988; Müller ve Witmann, 1984 gibi) ise bu bilişsel aktivitelerle birlikte bunlar arasındaki geçişleri de açıklamaya çalışmışlardır. Schoenfeld (1985), matematiksel modelleme sürecini altı temel basamakta ele alırken, temel bileşenlere yer vermemekte ve temel basamaklar arasındaki geçişlerden ziyade daha çok gerçekleşen bilişsel aktivitelere ve onların özelliklerine değinmektedir (bkz. Tablo 1).

Tablo 1: Matematiksel Modelleme Süreci (Schoenfeld, 1985)

Basamaklar	Açıklamaları
1) Problemi okuma	Problem ifadesi okunur ve anlamlandırılır.
2) Modeli oluşturma	Problem durumu basitleştirilir, yapılandırılır ve matematikselleştirilir.
3) Tahmin etme	Problemin gerçek durumuna uygun sayısal tahminler yapılır.
4) Hesaplama	Problem elde edilen denklemler ya da grafikler yardımıyla çözülür.
5) Raporlaştırma	Problemde elde edilen bulgular özetlenir ve çözüm yazılı hale getirilir.

Modelleme sürecini açıklayan diğer bir çalışmada sürecin ilk basamakları, gerçek yaşam probleminin matematiksel sembollerle formüle edilmesi, durumu tanımlayan değişkenlerden ve bu değişkenlerle ilgili denklemlerden matematiksel modelin ortaya çıkarılmasıdır (Mason,

1988). Sonrasında analiz edilen ve çözülen problemde elde edilen matematiksel sonuçlar gerçek yaşam durumu kapsamında yorumlanmakta ve açıklanmaktadır (bkz. Şekil 2). Mason (1988), modelleme süreci modelini açıklarken Pollak'ın (1979) ve Müller ve Wittmann'ın (1984) çalışmasındaki gibi sol tarafın gerçek dünyadan etkilenen bir süreci, sağ tarafın ise matematiksel dünyadan etkilenen bir süreci gerektirdiğini ifade etmektedir.

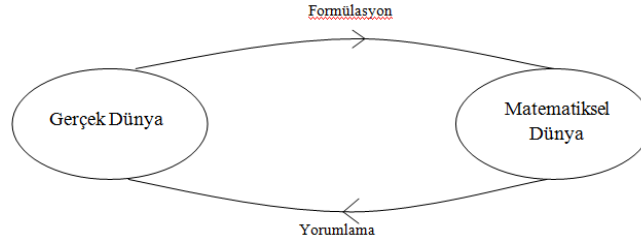


Şekil 2: Modellemedeki Temel Basamaklar (Mason, 1988)

Mason'a (1988) göre 1. basamaktan 7. basamağa doğru genel bir gidiş olsa da özellikle gerçek sonuçlara ulaşırken karmaşık bir yapı karşımıza çıkmaktadır. Modelleme sürecinde matematiksel çözümün elverişli olduğu basit yeterli bir modelle gerçek durumu temsil eden karmaşık bir durum arasında sürekli bir alışveriş söz konusudur. Tanımlanan modelin gerçeğe uygun olduğu düşünülse de, modelden elde edilen matematiksel sonuçların gerçek yaşam sonuçlarına dönüşmediği durumlarla karşılaşılabilir. Bu durumda kişi modeli doğrulama basamağından tekrar geri dönerek yeni bir matematiksel model tanımlamak üzere 2. basamağa geçmektedir. Çoğu zaman kişiler 5. basamaktan 7. basamağa direk geçebilirler. Fakat matematiksel modelin gerçek yaşam durumuna yanıt vermediği durumlar incelenmeli ve gerekli görüldüğü takdirde kişi 2. basamağa geri dönmelidir. Bu yüzden süreçte fiziksel gerçeklik ile matematiksel dünya arasında kaçınılmaz bir geçiş söz konusudur. Mason (1988) çalışmasında önceki çalışmalardan farklı olarak modelin doğrulanmasına da temel basamaklar arasında yer vermektedir.

Birçok araştırmacı (Berry ve Houston, 1995; Blum ve Niss, 1989; Doerr, 1997; Mason,1989; Niss, 1989) süreci bir modelde temsil etmeye çalışırken bunun yanında matematiksel modelleme sürecinin bu kadar düz, anlaşılır ve basit bir süreç olmadığını, basamaklar arasında geçişin sık sık olduğu karmaşık bir yapılanma olduğunu vurgulamaktadır. Berry ve Houston'a (1995) göre, süreç temel olarak gerçek yaşam ve matematiksel dünya arasında etkileşim ile gerçekleşmektedir ve gerçek yaşam durumunun formüle edilmesi için

matematiğe geçiş, elde edilen matematiksel sonuçların yorumlanması için de gerçek yaşama geçiş yapılmalıdır (bkz. Şekil 3).



Şekil 3: Matematiksel Modellemenin Basit Bir Görünümü (Berry ve Houston, 1995)

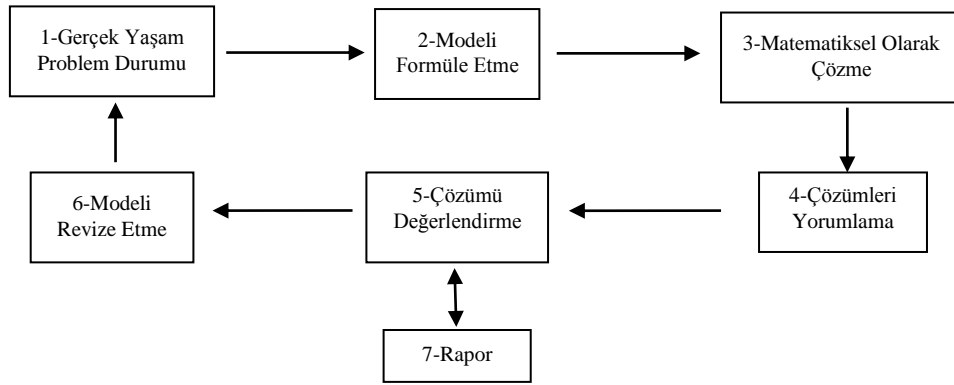
Berry ve Houston'a (1995) göre modellemede gerçek yaşamdan bir problem ele alınmakta ve matematiksel bir problem gibi düşünülerek bazı varsayımlarla birlikte bu problemin matematiksel modeli oluşturulmaktadır. Daha sonra matematiksel problem çözülmekte ve elde edilen sonuçlar yorumlanarak ve gerçek problemi çözmek için kullanılmaktadır (bkz. Tablo 2).

Tablo 2: Matematiksel Modelleme Sürecindeki Temel Basamaklar (Berry ve Houston, 1995)

Temel Basamaklar	Açıklamaları
1-) Problemi anlama	Gerçek yaşam problemi tanımlanır ve problem için gerekli veriler toplanarak analiz edilir.
2-) Değişkenleri seçme	Modelde kullanılacak değişkenler tanımlanır.
3-) Matematiksel modeli kurma	Varsayımlar doğrultusunda grafik, denklem, eşitsizlik gibi matematiksel yapılar kurularak gerçek yaşam durumunu temsil edecek veya tanımlayacak matematiksel model formüle edilir.
4-) Matematiksel problemi çözme	Matematiksel modeller aracılığıyla matematiksel bilgiler kullanarak problemin çözümü yapılır. Bu aşamada bilinen matematik bilgileri kullanılmalıdır.
5-) Çözümü yorumlama	Matematiksel analizin sonuçları değerlendirilir. Çözüm kelimelerle ifade edilir. Modelin onaylanması için ihtiyaç duyulan verilere karar verilir.
6-) Modeli doğrulama	Uygun veriler kullanılarak modelin idealliği test edilir. Model ve sonuçları sorgulanır.
7-) Modeli başka problemler için geliştirme	Modelin yapısı varsayımların temeline dayanır, varsayımlarda meydana gelecek bir geliştirme modelin geliştirilmesi için yol gösterir. Varsayımlar geliştirilerek yeni modeller geliştirilir.. Çözme, yorumlama ve onaylama süreçleri tekrar edilir.
8-) Rapor	Problem ve onun çözümünü gösteren bir rapor hazırlanır, bu bir poster, yazılı bir rapor ya da sözlü bir sunu şeklinde olabilir.

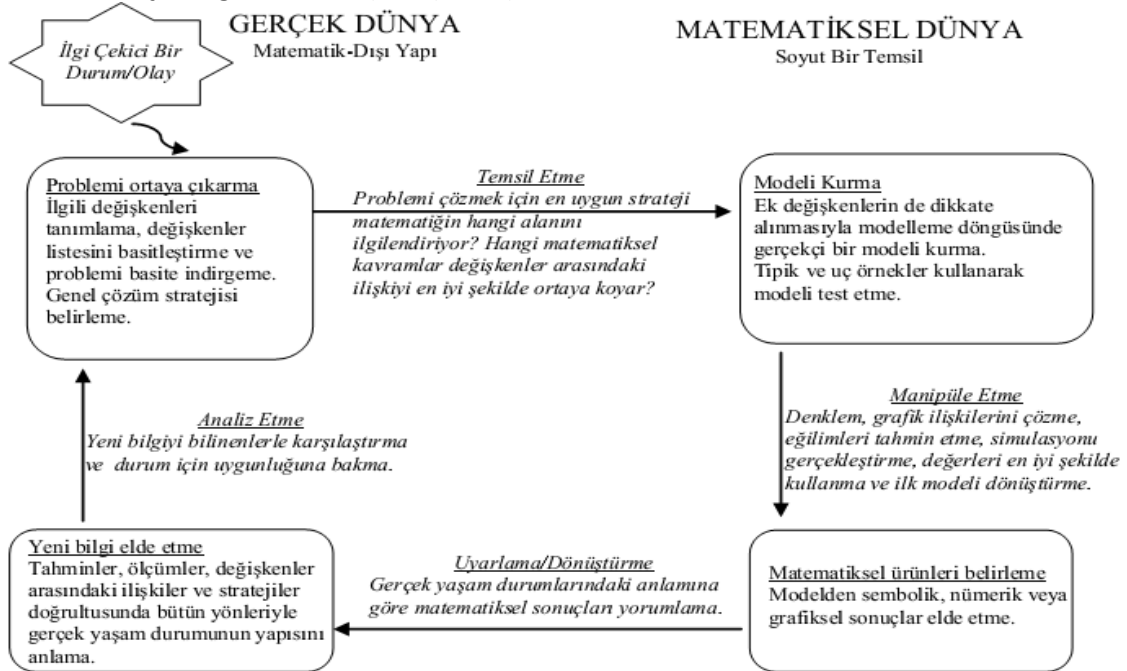
Berry ve Davies (1996) ise, matematiksel modelleme döngüsünü yedi temel basamak altında ele almaktadır (bkz. Şekil 4). Berry ve Davies'e (1996) göre, süreçte ilk olarak gerçek yaşam problem durumu ele alınmaktadır. Ardından durumu tanımlayan matematiksel model üretilmektedir. Sonrasında, matematiksel model kullanılarak, problemin matematiksel çözümü yapılmaktadır. Elde edilen sonuçlar yorumlanmakta ve doğruluğu irdelenmektedir. Eğer

sonuçların doğruluğundan şüphe duyuluyorsa, modelin doğruluğu sorgulanmalıdır ve model tekrar revize edilmelidir. Son olarak da, çözümün doğruluğu gerçek yaşam durumuna göre irdelendiğinde bir sıkıntı gözlenmiyorsa, çözüm yazılı veya sözlü bir rapor haline getirilmektedir. Çalışmadaki yedi temel basamak dikkate alındığında 1. ve 7. basamağın aslında modelleme sürecinin bir bileşeni olduğu görülmektedir. Bir başka deyişle, 1. ve 7. basamak aslında süreci değil bir bileşeni veya bir durumu ifade etmektedir. Ancak diğer basamakların süreci ifade etmeleri nedeniyle temel basamak olarak ele alınmaları ve söz konusu modelleme süreci için temel basamak ve bileşen arasındaki farklılığın belirtilmesi uygun olacaktır.



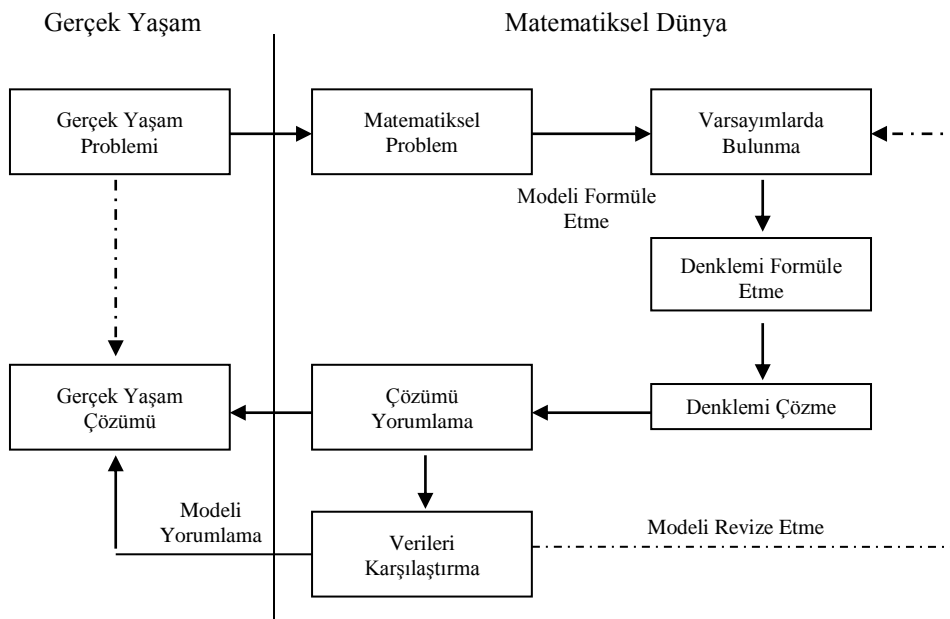
Şekil 4: Modelleme Döngüsü (Berry ve Davies, 1996)

Abrams (2001), matematiksel modellemenin matematiksel düşünmenin ortaya çıkması ve uygulanması için güçlü bir süreci yarattığını ifade etmektedir. Ona göre, öğrencilerin söz konusu probleme dair sahip oldukları deneyimler, problemi çözmek için ihtiyaç duydukları etkenlerin başında gelmektedir (bkz. Şekil 5).



Şekil 5: Matematiksel Modelleme Döngüsü (Abrams, 2001)

Cheng'e (2001) göre, matematiksel modelleme, gerçek yaşam problemlerinin matematiksel terimlerle temsil edilmesi süreci; matematiksel model ise karmaşık bir gerçek yaşam durumunun bir özeti veya yalın bir halidir (Cheng, 2001). Matematiksel modelleme gerçek yaşam problemlerinin çözümlerinin araştırılması için matematiksel bir probleme dönüştürülmesiyle başlamakta, devamında problem matematiksel teknikle çözülmekte ve elde edilen matematiksel çözümler gerçek yaşama uyarlanıp yorumlanmaktadır. Cheng (2010) "Teknoloji ile Matematiksel Modellemeyi Öğretme ve Öğrenme" isimli çalışmasında Cheng (2006) çalışmasındaki modelleme sürecini derleyerek daha ayrıntılı bir süreç modeli sunmaktadır (bkz. Şekil 6).

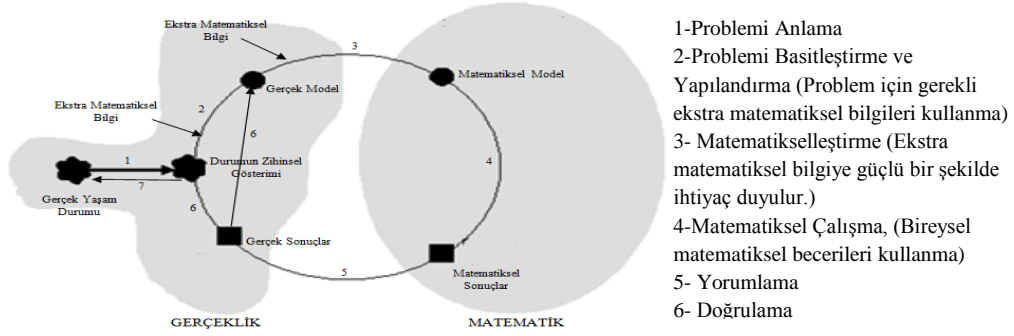


Şekil 6: Matematiksel Modelleme Süreci (Cheng, 2010)

Matematiksel modellemede gerçek yaşam durumunun karmaşıklığı aynı şekilde modelin yapısının da karmaşık olmasına neden oluyorsa bilgisayar gibi teknolojik araçlardan yararlanılması gerekmektedir (Cheng, 2010). Çünkü bu hem modelin uygun bir şekilde yorumlanmasına hem de doğruluğunun ayrıntılı bir şekilde irdelenmesine olanak sağlayan zengin bir süreç ortamının yaratılmasına neden olmaktadır (Cheng, 2010). Bunun yanında, Cheng (2010) teknoloji destekli matematiksel modelleme sürecinin görüldüğünden çok daha karmaşık bir süreç olduğunu belirtmekte ve teknoloji destekli modelleme sürecine dair daha çok araştırması yapılması gerektiğini vurgulamaktadır.

Borromeo Ferri'nin (2006), matematiksel modelleme sürecini açıklayan çalışmasında ortaya çıkardığı döngü Blum ve Lei'sin (2005) modelleme döngüsüyle benzerlikler göstermektedir. Borromeo Ferri (2006), Blum ve Lei'sin (2005) çalışmasından farklı olarak

sürecin 7. basamağını sunma olarak ifade etmektedir. Bir başka ifadeyle, Borromeo Ferri'ye (2006) göre, gerçek sonuçlar yorumlandıktan sonra bireyde oluşan son zihinsel model yardımıyla gerçek yaşam problem durumunun ayrıntılarının ortaya koyulması açısından modelleme sürecinde sunma gerçekleştirilmektedir (bkz. Şekil 7).



Şekil 7: Modelleme Döngüsü (Borromeo Ferri, 2006)

Blum ve Leiß (2007) gerçekleştirdikleri çalışmalarında süreçteki evreni matematik dışı dünya olarak tanımlamaktadır. Bilişsel yaklaşıma dayanarak oluşturulan söz konusu matematiksel modelleme süreci problemi okuma ve gerçek yaşam durumunu anlama ile başlamaktadır. Blum ve Leiß'in (2007) modelleme sürecinde Borromeo Ferri'nin (2006) "Sunma" basamağı dikkate alınmakta ve "Ortaya Çıkarma (Exposing)" olarak ifade edilmektedir. Borromeo Ferri'nin (2006) çalışmasının, Blum ve Leiß (2005, 2007) çalışmalarından temel farkı sözel problemlerde daha çok ortaya çıkan "durum modeli" terimini süreçte kullanmamasıdır. Bunun yerine, öğrencilerin problemi okurken ve anlamlandırırken oluşan zihinsel süreçlerini daha iyi yansıttığını düşündüğü için "durumun zihinsel gösterimi" ifadesini kullanmaktadır. İki ifade bakıldığında "durum modeli" modelleme sürecindeki bireylerde oluşan problem durumunun zihinsel gösteriminin bir yansıması olmaktadır. Bu iki ifade de süreçte ortaya çıkan ve süreci şekillendiren temel bileşenler olarak ele alınmaktadır.

Blomhøj ve Jensen (2006), matematiksel modelleme sürecini şekillendiren temel basamakların özelliklerini Tablo 3'deki gibi açıklamaktadır.

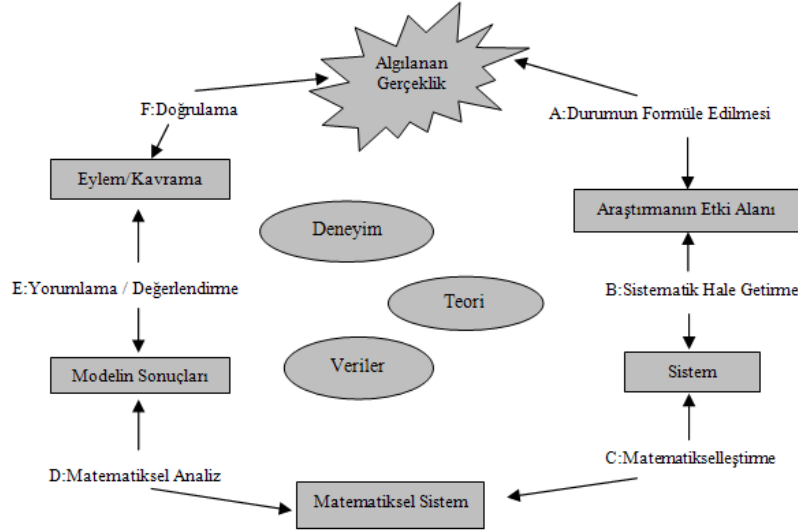
Tablo 3: Modelleme Döngüsündeki Temel Basamaklar ve Özellikleri (Blomhøj ve Jensen, 2006)

Basamaklar	Açıklamaları
A- Durumun Formüle Edilmesi	Gerçek yaşam durumunu temsil eden zihinsel modeli oluşturabilmek ve problemi çözebilmek için gerekli özellikler tanımlanmaktadır.
B: Sistematik Hale Getirme	Durumun matematiksel gösterimi için nesnelere ve ilişkileri belirlenmektedir. Teorik yapıyı oluşturma, deneyimlerden yararlanma ve üst düzey varsayımlarda bulunma matematiksel sistemin kurulmasına olanak sağlamaktadır.
C: Matematikselleştirme	Sistemdeki nesnelere ve aralarındaki ilişkiler tutarlı gerekçeler doğrultusunda matematiksel olarak ifade edilir.
D: Matematiksel Analiz	Matematiksel sonuçlar elde etmek için matematiksel yöntemler



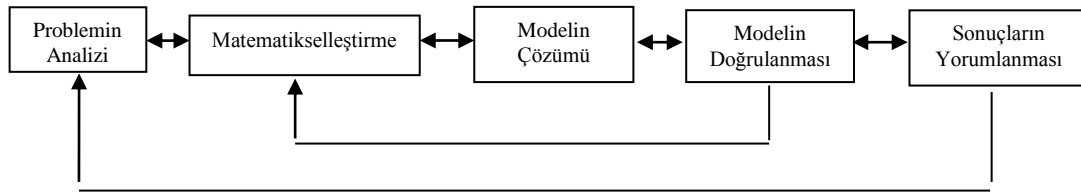
	kullanılmaktadır.
E: Yorumlama/Değerlendirme	Gerçek yaşam problem durumunun ayrıntıları dikkate alınarak elde edilen matematiksel sonuçlar yorumlanmaktadır.
F: Doğrulama	Deneyimler, gözlemler, tahmini veriler ve teorik bilgilerden yararlanarak modelin doğruluğu değerlendirilmektedir.

Blomhøj ve Jensen (2006), süreç içerisinde ele aldıkları “araştırmanın etki alanı” ve “sistem”i, Blum ve Leiß (2007) gerçek model ve durum modeli olarak ele almaktadır (bkz. Şekil 8).



Şekil 8: Modelleme Döngüsünün Bir Modeli (Blomhøj ve Jensen, 2006)

Bir diğer süreç çalışmasında Voskoglu (2006), matematiksel modelleme sürecini beş temel basamakta ele alarak süreç içerisinde her basamak arasındaki geçişin mümkün olduğunu ve bu durumun da çözüm sürecini karmaşıktırdığını ifade etmektedir (bkz. Şekil 9).



Şekil 9: Matematiksel Modelleme Sürecinin Akış Diyagramı (Voskoglu, 2006)

Voskoglu'ya (2006) göre modelleme süreci problemin analiziyle başlamaktadır. Bu basamakta problem durumu anlaşılabilir şekilde gerçek yaşam durumu için gereksinimler ve sınırlandırmalar ortaya konulmaktadır. Matematikselleştirme basamağında gerçek yaşam durumunun formüle edilmesi ve matematiksel ifadelerle modelin kurulması gerekmektedir. Elde edilen model kullanılarak istenilen duruma yanıt veren çözüm matematiksel işlemler yardımıyla elde edilmektedir. Voskoglu (2006) daha sonra gerçek yaşam durumundaki

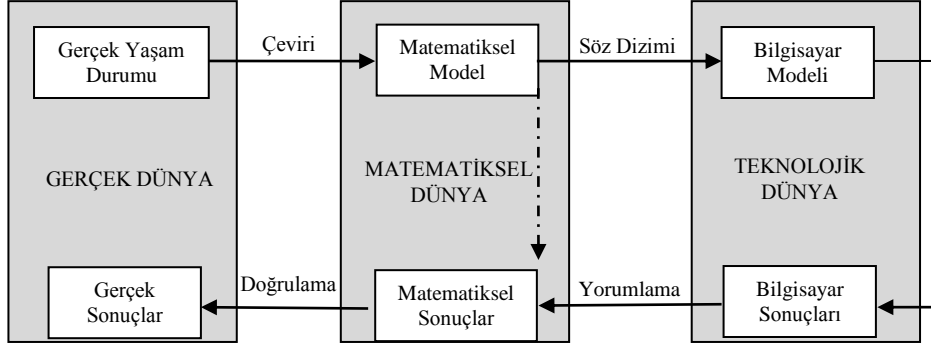
verilerle modelden elde edilen verilerin karşılaştırılacağını ifade etmektedir. Son olarak da probleme cevap vermek için elde edilen matematiksel sonuçların yorumlanması yapılmakta ve bu sonuçlar gerçek yaşam durumuyla ilişkilendirilmektedir. Voskoglou (2006) çalışmasında diğer araştırmacılardan farklı olarak, modelleme sürecinde modelin doğrulanmasının sonuçların yorumlanması temel basamağından önce gerçekleştiğini ifade etmektedir. Biccard ve Wessels (2011), Ferri (2006) gibi süreçte yorumlamanın doğrulamadan önce gerçekleştiğini ifade etmektedir. Doğrulanmanın yapılabilmesi için öncelikle matematiksel sonuçlardan gerçek yaşam durumuna dair sonuçların elde edilmesi gerekmektedir ve daha sonra bu sonuçların doğruluğunun sorgulanması aşamasına geçilmektedir (Biccard ve Wessels, 2011; Hıdıroğlu, 2012). Biccard ve Wessels (2011), matematiksel modelleme sürecinin önemli alt süreçleri barındırdığını ifade etmekte ve bu süreçteki bilişsel etkinlik ve özellikleri Tablo 4'deki gibi açıklamaktadır.

Tablo 4: Modelleme Sürecindeki Bilişsel Aktiviteler (Biccard ve Wessels, 2011)

Bilişsel Aktiviteler	Açıklamaları
Anlama	Duruma yönelik deneyimleri ortaya çıkarmak ve durumun kapsamının irdeleyebilmektir.
Basitleştirme	Problemi çözmek için gerekli özellikleri belirlemek, verileri kullanarak problem durumuna ilişkin düşünceler ortaya koymak ve varsayımların nedenlerini açıklayabilmektir.
Matematikselleştirme	Gerçek dünyayı matematiksel dünyaya dönüştürmek ve gerçek yaşam durumunun hangi matematiksel kavramlara karşılık geldiğini belirleyebilmektir.
Matematiksel çalışma yapma	Varsayımlar doğrultusunda gerekli matematiksel bilgi ve yöntemleri kullanabilmek ve uygulayabilmektir.
Yorumlama	Matematiksel sonuçları gerçek yaşam durumunu dikkate alarak değerlendirebilmektir.
Doğrulama	Elde edilen matematiksel sonuçların gerçek yaşam durumu için geçerli olup olmadığını değerlendirebilmektir.
Sunma	Çözüm sürecindeki düşünceleri ve yapılanları açık bir şekilde sunabilmektir (Mousoulides et al., 2007).
Tartışma	Yapılanları anlatıp var olan eksiklikleri ortaya çıkarabilmektir.
Yönü tahmin etme	Sürecin başından itibaren ileriki aşamalarda neye nasıl ulaşılacağını bilmektir.
İnformal bilgiyi kullanma	Matematiksel bir alanı ilgilendirmeyen bir bilginin çözüm için kullanılmasını gerektirir.
Planlama ve organize olma	Çözüm sürecindeki organizasyon ve çözüm döngülerinin denetlenmesi ile ilgilidir.

Günümüzde bilgisayar teknolojisinin gelişimi; derslerde kullanılabilecek yazılımların niteliğini ve niceliğini arttırmakta, alternatifleri de çoğalmaktadır (Lingefjärd, 2000). Bu bağlamda, matematiksel modelleme ve teknolojinin iç içe olduğu durumlar farklı bir araştırma alanı olarak ortaya çıkmakta ve teknoloji ile iç içe olan matematiksel modelleme sürecinin önemi araştırmacılar tarafından vurgulanmaktadır.

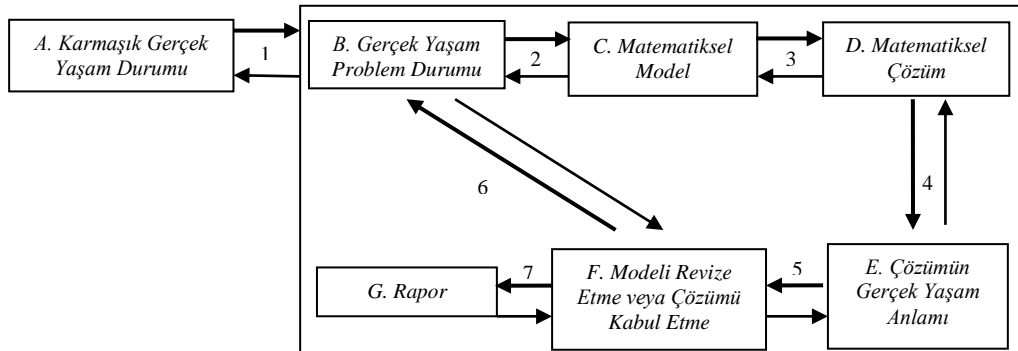
Siller ve Greefrad (2010), teknolojinin matematiksel modellemeye etkisini inceledikleri çalışmada, Skovsmose'un (1994) Genişletilmiş Modelleme kapsamında sürece açıklama getirmeye çalışmışlardır. Sketch yazılımını ve grafik hesap makinelerini kullanarak öğrencilerin matematiksel modelleme sürecinde teknolojiyi nasıl ve ne zaman kullandıklarından yararlanarak Şekil 10'daki süreç modelini oluşturmuşlardır.



Şekil 10: Genişletilmiş (Extended) Modelleme Döngüsü (Siller ve Greefrad, 2010)

Siller ve Greefrad (2010), Blum ve Leiß (2007)'in teknoloji etkisi olmadan ele aldığı sürecin temel bileşenlerini (Gerçek yaşam durumu, matematiksel model, matematiksel sonuçlar, gerçek sonuçlar) dikkate alarak bunlara bilgisayar modeli ve bilgisayar sonuçlarını eklemektedir. Ayrıca teknoloji destekli modelleme sürecinde gerçek dünya, matematiksel dünya ve teknoloji dünyası olarak üç temel geçişin bulunduğunu ifade etmektedirler.

Stillman, Galbraith, Brown ve Edward (2007), gerçekleştirdikleri modelleme uygulamalarına dayanarak teknoloji destekli matematiksel modelleme sürecindeki aşamalar arasındaki geçişleri ifade etmektedirler. Stillman, Galbraith, Brown ve Edward'ın (2007), daha önceki (Galbraith ve Stillman, 2006) süreç modelini geliştirdikleri görülmektedir. Birlikte çalışma gruplarıyla gerçekleştirilen bu çalışmada, araştırmacılar verilerin analizi sonucunda aşağıdaki süreç modelini ortaya koymuşlardır (bkz. Şekil 11).



- 1-Anlama, yapılandırma, basitleştirme, içeriği yorumlama.
- 2-Varsayımda bulunma, formüle etme, matematikselleştirme.
- 3-Matematiksel çalışma yapma.
- 4-Matematiksel çıktılarını yorumlama.
- 5-Birleştirme, eleştirme, doğrulama.
- 6-İletişim, çözümü savunma (eğer model tatmin ediciyse).
- 7-Modelleme sürecinin tekrar edilmesi (eğer model tatmin edici değilse).

Şekil 11: Modelleme Süreci (Stillman, Galbraith, Brown ve Edward, 2007)

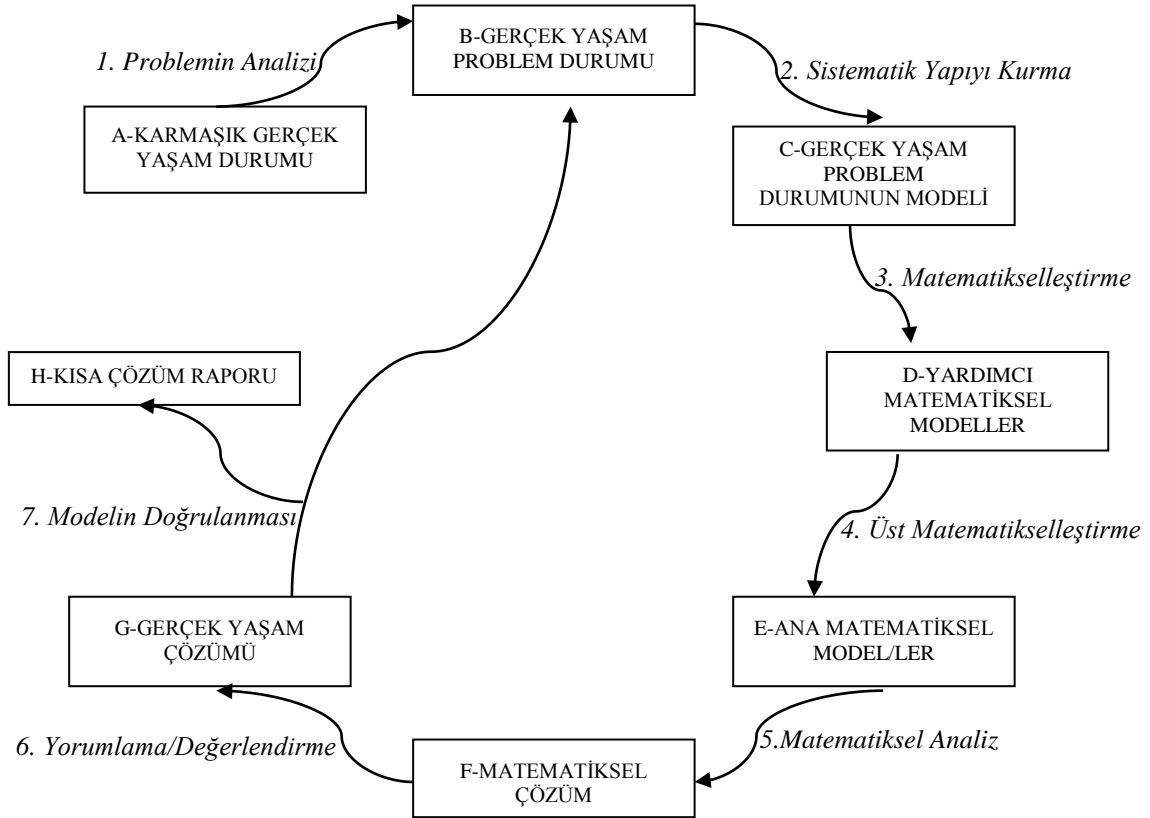
Araştırmacıların modelleme süreci üzerine yaptıkları çalışmanın, temelini Galbraith ve Stillman'ın (2006) "Modelleme Sürecinde Geçişler Sırasında Öğrenci Zorluklarını Tanımlamak İçin Bir Çerçeve" (A Framework For Identifying Student Blockage During Transitions In The Modelling Process) isimli modelleme sürecinin temel bileşenleri doğrultusunda bilişsel aktivitelerin tanımlandığı çalışmaya (bkz. Tablo 5) dayandığı görülmektedir.

Tablo 5: Geçişlerdeki Öğrenci Zorluklarını Tanımlamak İçin Oluşturulan Çerçeve (Galbraith ve Stillman, 2006)

Temel Bileşenler	Tanımlanan Öğrenci Zorlukları
Karmaşık Gerçek Yaşam Durumu	1.1 Problem durumunu açıklama. 1.2 Basit varsayımlarda bulunma. 1.3 Stratejik etkenleri saptama. 1.4 Stratejik etkenlerin doğru elemanlarını belirleme.
↓	
Gerçek Yaşam Problem Durumu	
↓	
Gerçek Yaşam Problem Durumu	2.1 Cebirsel modelin içereceği bağımlı bağımsız değişkenleri belirleme. 2.2 Bağımsız değişkenleri birbirine karıştırmayacak şekilde tanımlama. 2.3 Elemanları matematiksel olarak kullanılabilir formüllerle temsil etme. 2.4 Bağlantılı varsayımlarda bulunma. 2.5 Hesaplamaya olanak sağlayan matematiksel tabloyu ve teknolojiyi seçme. 2.6 Formülü çoklu durumlara uygulayabilmek için uygun tekniği seçme. 2.7 Modelin grafiksel gösterimini seçmek için uygun teknolojiyi seçme. 2.8 Cebirsel denklemi doğrulamak için uygun teknolojiyi seçme. 2.9 Bir grafiği anlama ve cebirsel bir denklemi doğrulamak için fonksiyon grafiklerini kullanma.
↓	
Matematiksel Model	
↓	
Matematiksel Model	3.1 Uygun formülü uygulama. 3.2 Daha çok yönlü bir fonksiyon elde edebilmek için sembolik formülleri kullanarak cebirsel basitleştirme sürecinde bulunma. 3.3 Çoklu durumlara göre fonksiyon işlevselliği otomatik olarak sağlamak için uygun teknolojiyi kullanma. 3.4 Hesaplamayı yapmak için matematiksel tabloları veya teknolojiyi kullanma. 3.5 Grafiksel gösterimi üretmek için teknolojiyi kullanma. 3.6 Matematiksel veya teknolojik notasyonları ve geçişleri doğru bir şekilde yapma. 3.7 Teknolojiyi kullanarak cebirsel modeli doğrulama. 3.8 Çözümlerin yorumlanmasına olanak sağlayan toplumsal sonuçlar elde etme.
↓	
Matematiksel Çözüm	
↓	
Matematiksel Çözüm	4.1 Matematiksel sonuçları gerçek yaşamdaki karşılıklarıyla birlikte tanımlama. 4.2 Geçici ve nihai matematiksel sonuçları gerçek yaşam durumu açısından irdeleme (rutinlikten karmaşıklığa geçiş). 4.3 Yorumları doğrulamak için tartışmaları bütünleştirme. 4.4 Yeni bir yorumu destekleyen sonuçları üretmek için önceki varsayımları genişletme. 4.5 Yorumlayıcı bir soru yöneltmeden önce matematiği dahil etme ihtiyacının farkında olma.
↓	
Çözümün Gerçek Yaşam Anlamı	

Çözümün Gerçek Yaşam Anlamı	5.1 Beklenmedik sonuçlarla gerçek durumu uzlaştırma.
↓	5.2 Matematiksel sonuçların olası gerçek dünya etkilerini dikkate alma.
↓	5.3 Problemin matematiksel ve gerçek dünya yönlerini uzlaştırma.
↓	5.4 Geçerli bir çözüm için kabul edilebilir kısıtlamaların yumuşatılmasının bir sınırının olduğunun farkına varma.
Çözümün Kabulü veya Revize Edilmesi	5.5 Modelin ayrıntılı sonuçlarının gerçek dünya yeterliliğini dikkate alma.

Teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel aktivitelerin ortaya çıkarılması amacıyla gerçekleştirilen çalışmalardan biri de gömülü teori sonucunda, matematiksel modelleme sürecine ilişkin sekiz temel bileşen ve bu temel bileşenler arasındaki geçişi sağlayan yedi temel basamağın ortaya çıkarıldığı Hıdıroğlu (2012) tarafından gerçekleştirilen yüksek lisans tez çalışmasıdır. Bu çalışma ile sürecin temel basamaklarına ve bileşenlerine dair farklı bir açıklama getirilmekte ve teknolojinin de etkisiyle temel basamakları şekillendiren 47 alt basamak ortaya koyulmaktadır. Diğer çalışmalardan farklı olarak, GeoGebra ve matematiksel modellemenin iç içe olduğu çalışmada matematiksel modelleme süreci kapsamlı bir şekilde ele alınmaktadır.



Şekil 12: Matematiksel Modelleme Sürecinin Temel Yapısı (Hıdıroğlu, 2012)

Matematiksel modelleme sürecinde ilk olarak karmaşık gerçek yaşam durumu anlaşılmasına çalışılmaktadır. Problem ifadesini anlamlandırmak için sadeleştirme yapılarak,

problemdaki verilenler ve istenenler hakkında ön görüşler sergilenmektedir. Kısacası problemin analizi yapılarak gerçek yaşam durumunun karmaşıklığı ortadan kaldırılmaktadır. Sürecin devamında, gerçek yaşam durumunda istenilene ulaşmak için gerekli stratejik etkenler (değişken, sabit gibi), matematiksel kavramlar, teknolojik araçlar vb. düşünülerek bir genel çözüm stratejisi ortaya atılmaktadır. Bu doğrultuda varsayımlarda bulunularak, sistematik yapı kurulmakta ve gerçek yaşam problem durumunun bir modeline ulaşılmaktadır. Süreç boyunca ideal çözüm, gerçek yaşam durumunu temsil eden model üzerinden ilerlemekte ve matematiksel semboller, bilgiler ve beceriler doğrultusunda veriler gruplandırılmaktadır.

Teknolojiden uygun şekilde yararlanılarak, gerekli “yardımcı matematiksel model (YMM)”ler elde edilerek matematikselleştirme gerçekleştirilmektedir. Teknoloji kullanılarak elde edilen YMMler yardımıyla “ana matematiksel model(AMM)”e ulaşmak için, YMMlerin grafiksel veya cebirsel gösterimlerinden yararlanılmaktadır. AMM için gerekli değişkenler doğrultusunda YMMler ilişkilendirilerek üst matematikselleştirme gerçekleştirilmektedir. Elde edilen AMM’den yararlanılarak, problemde istenene ulaşmak için gerekli matematiksel çözüme ulaşılmaktadır. Gerçek yaşam durumunun matematiksel analizi gerçekleştirilerek matematiksel sonuçlar da elde edilmektedir. Matematiksel analizde, matematiksel çözüm ve matematiksel sonuç olarak iki kavram ortaya çıkmaktadır. Matematiksel çözüm; AMMden elde edilen ve istenilen duruma cevap veren matematiksel ifadeler olarak karşımıza çıkmaktadır. Matematiksel sonuçlar ise, bazen matematiksel çözüme ulaşmada kullanılırken; bazen de gerçek yaşam durumunun farklı durumları için AMM’ye genel bir bakış sağlamaktadır. Bu matematiksel çözümlerin ve sonuçların gerçek yaşam durumunda bir anlam ifade etmesi için gerçek yaşama uyarlanmaları gerekmektedir.

Matematiksel dünya ile gerçek yaşam arasındaki ilişki irdelenerek yorumlama/değerlendirme yapılmakta ve matematiksel çözümden gerçek yaşam çözümüne, matematiksel sonuçlardan da gerçek yaşam sonuçlarına ulaşılmaktadır. Modelleme sürecinde, gerçek yaşam çözümünün elde edilmesinin ardından günlük yaşam deneyimlerinden, problemlerle birlikte verilen animasyon, video/resimlerden ve çözüm esnasında yapılabilen ölçümlerden yararlanılarak modelden elde edilen gerçek yaşam sonuçlarının doğruluğunun irdelendiği görülmektedir. Bunun yanı sıra YMMlerden yararlanarak AMM’nin doğruluğu da irdelenmektedir. Gerçek yaşam problemine ait teorik ve deneysel olarak elde edilen veriler karşılaştırılmakta ve modelin geçerliliği hakkında bir karara varılmaktadır. Bu temel basamak, gerçek yaşam sonuçlarından yararlanarak modelin doğrulanmasını içeren temel basamak olarak karşımıza çıkmaktadır. Modelin doğrulanması basamağında sadece gerçek yaşam

çözümünden hareketle değil aynı zamanda gerçek yaşam sonuçları da dikkate alınarak modelin geçerliliği sorgulanmaktadır. Eğer modelin geçerliliği çözücü tarafından tatmin edici bir boyuttaysa ileriki bileşen kısa çözüm raporu olmaktadır. Eğer modelin gerçek yaşam sonuçlarının gerçekçi olmadığı düşünülüyorsa; problem tekrar gözden geçirilip önceki basamaklara dönülerek modelin geçerliliği sağlanmaya çalışılmaktadır.

SONUÇ

Çalışmalar incelendiğinde modelleme sürecindeki bilişsel aktivitelere yönelik gittikçe daha ayrıntılı açıklamaların getirildiği ve teknolojik gelişmelerin modelleme sürecinin kavramsallaştırılmasında dikkate alındığı görülmektedir. Matematiksel modelleme sürecine yönelik araştırmalarda farklı düşüncelerin ortaya çıkması sürecin karmaşık yapısını ortaya koymaktadır. Karmaşık bir yapıdaki düzeni çözümleyebilmek ona farklı açılardan bakabilme ile kolaylaşmaktadır (Baki, 2002). Bu nedenle, teknolojinin değişik etkileri de göz önüne alınarak gerçekleştirilen matematiksel modelleme sürecine yönelik çalışmaların daha zengin bilişsel ve üst bilişsel süreçlerin ortaya çıkmasına neden olduğu görülmektedir. Bu durumun, matematiksel dünya ve gerçek yaşamla birlikte teknoloji tabanlı dünyanın da bu süreçte etkili olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Ayrıca, teknolojinin süreçteki farklı stratejileri ortaya çıkarmasının daha farklı bilişsel ve üst bilişsel aktiviteleri ortaya çıkardığı düşünülmektedir. Sunulan çalışmalarda modelleme sürecindeki bilişsel ve üst bilişsel gereksinimlerin tanımlanması ile öğretmenlere derslerinde öğrencilerinden ne beklemesi gerektiği hakkında daha planlı ve kapsamlı bakış sağlanacağı düşünülmektedir.

Bu çalışma ile matematiksel modelleme sürecindeki bilişsel etkinlikler hakkında bilgi verilmektedir. Kaiser & Sriraman (2006), literatürdeki matematiksel modellemeye ait farklı bakış açıları dikkate alındığında, öğrencilerin modelleme esnasındaki bilişsel süreçlerine yoğunlaşan çalışmaların ihmal edildiğini vurgulamaktadır. Çalışmada sunulan farklı yaklaşımlarla ileriki çalışmalar için bilişsel ve üst bilişsel yaklaşımlara ilişkin araştırmacılara zengin ve farklı bakış açıları sağlanacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Abrams, J. P. (2001). Mathematical Modeling: Teaching the Open-Ended Application of Mathematics. *The Teaching Mathematical Modeling and the of Representation*. 2001 Yearbook, NCTM, (Eds. Cuoco, A.A. and Curcio, F.R.).
- Baki, A. (2002). *Öğrenen ve Öğretenler İçin Bilgisayar Destekli Matematik*. BİTAV-Ceren Yayın Dağıtım, İstanbul.
- Berry, J. ve K. Houston (1995). *Mathematical Modelling*. Bristol: J. W. Arrowsmith Ltd.

- Berry, J. ve Davies, A. (1996) Written Reports. In C.R. Haines and S. Dunthorne (eds) *Mathematics Learning and assessment: Sharing Innovative Practices*. London: Arnold, 3.3-3.11.
- Biccard, P. ve Wessels, D. C. J. (2011). Documenting the Development of Modelling Competencies of Grade 7 Mathematics Students. *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. 1(5), 375-383.
- Blomhøj, M. ve Jensen T. H. (2006). What's All the Fuss about Competencies? Experiences with Using a Competence Perspective on Mathematics Education to Develop the Teaching of Mathematical Modelling. In W. Blum, P.L. Galbraith and M. Niss: *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer, 2(2), 45-56.
- Blum, W. ve Niss, M. (1989). Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. M. Niss, W. Blum ve I. Huntley (Ed.). *Modelling Applications and Applied Problem Solving*. (s.1-19). England: Halsted Pres.
- Blum, W. ve Leiß, D. (2005). „Filling Up“- The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons With Demanding Modelling Tasks. In: Bosch, Marianna (Ed.): *CERME 4 – Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. 1623-1633.
- Blum, W. ve Leiß, D. (2007). How Do Students and Teachers Deal With Modelling Problems? In C. Haines et al. (Eds), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics*. Chichester: Horwood. 222-231.
- Blum, W. ve Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Application, and Links to Other Subjects-State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*. 22(1), 37- 68.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and Empirical Differentiations of Phases in the Modelling Process. In Kaiser, G., Sriraman B. & Blomhoij, M. (Eds.) *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 38(2), 86-95.
- Cheng, A. K. (2001). Teaching Mathematical Modelling in Singapore Schools. *The Mathematics Educator*. 6(1), 63-75.
- Cheng, A. K. (2006). *Differential Equations: Models and Methods*. McGraw-Hill, Singapore.
- Cheng, A. C. (2010). Teaching and Learning Mathematical Modelling with Technology, Nanyang Technological University.
- <http://atcm.mathandtech.org/ep2010/invited/3052010_18134.pdf> erişim tarihi 20.03.2012.
- Doerr, H. M. (1997). Experiment, Simulation And Analysis: An Integrated Instructional Approach To The Concept Of Force. *International Journal Of Science Education*. 19, 265-282.
- English, L. D. ve Watters, J. J. (2004). Mathematical Modeling in the Early School Years. *Mathematics Education Research Journal*. 16(3), 59-80.
- Galbraith, P., ve Stillman, G. (2006). A Framework for Identifying Student Blockages During Transitions in the Modelling Process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM*. 38(2), 143-162.

- Haines, C. R. ve Crouch, R. (2010). Remarks on a Modeling Cycle and Interpreting Behaviours. In R. Lesh, P. L. Galbraith, W. Blum & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies, ICTMA 13*. Part 5, 145-154.
- Hıdıroğlu, Ç. N. (2012). *Teknoloji destekli ortamda matematiksel modelleme problemlerinin çözüm süreçlerinin analiz edilmesi: Yaklaşım ve düşünme süreçleri üzerine bir açıklama*. Yüksek Lisans Tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.
- Kaiser, G., (2005). Introduction to the Working Group "Applications and Modelling". CERME4 Proceedings, p 1611-1622.
- Kaiser, G. ve Sriraman, B. (2006). A Global Survey of International Perspectives on Modelling in Mathematics Education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 302-310.
- Kapur, J. N. (1982). The Art of Teaching the Art of Mathematical Modeling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 13(2), 185-192.
- Lesh, R., Surber, D. ve Zawojewski, J. (1983). Phases in Modelling and Phase-Related Processes. J. C. Bergeron ve N. Herscovics. (Ed.), *Proceedings of the Fifth Annual Meeting Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*. 2, 129-36.
- Lesh, R. ve Doerr, H. M. (2003). (Eds.). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*. Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum.
- Lingefjärd, T. (2000). Mathematical Modeling by Prospective Teachers Using Technology. Electronically published doctoral dissertation, University of Georgia.
<<http://ma-serv.did.gu.se/matematik/thomas.htm>> erişim tarihi 28.11.2010.
- Lingefjärd, T. (2006). Faces of Mathematical Modeling. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-ZDM*. 38(2), 96-112.
- Mason, J. (1988). Modelling: What Do We Really Want Pupils to Learn? In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children*. (pp. 201-215). London: Hodder & Stoughton.
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2006). *Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı*. Ankara: MEB Basımevi.
- Mousoulides, N., Sriraman, B. ve Christou, C. (2007). From Problem Solving to Modelling: The Emergence of Models and Modelling Perspectives. *Nordic Studies in Mathematics Education*. 12(1), 23-47.
- Müller, G., ve Wittmann, E. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe*. Braunschweig: Vieweg.
- Niss, M. (1989). Aims and Scope of Applications and Modelling in Mathematics Curricula. In W. Blum, J. S. Berry, R. Biehler, I. Huntley, G. Kaiser-Messmer & L. Profke (Eds.), *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics*. (pp. 22-31). Chichester: Ellis Horwood.
- Peter-Koop, A. (2004). Fermi Problems in Primary Mathematics Classrooms: Pupils' Interactive Modelling Processes. In I. Putt, R. Farragher, & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the Third Millenium: Towards 2010* (Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, pp. 454-461). Townsville, Queensland: MERGA.
- Pollak, H. (1979) The Interaction between Mathematics and other School Subjects. UNESCO (Ed.). *New Trends in Mathematics Teaching IV*. Paris.

- Polya, G. (1957). *How to Solve it- A New Aspect of Mathematical Method*. New York: Doubleday ve Company, Inc.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. San Diego: Academic Press Inc.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 334– 370). Macmillan: New York.
- Siller, H. S. ve Greefrath, G. (2010). Mathematical Modelling In Class Regarding To Technology. *CERME 6 – Proceedings of the sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. 108-117.
- Sriraman, B. (2005). Conceptualizing the Notion of Model Eliciting. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Sant Feliu de Guíxols, Spain.
- Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J. ve Edwards, I.(2007). A Framework for Success in Implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom. *Mathematics: Essential Research, Essential Practice*. 2, 688- 697.
- Treilibs, V., Burkhardt, H., ve Low, B. (1980). *Formulation Processes in Mathematical Modelling*. Nottingham: University of Nottingham Shell Centre for Mathematical Education.
- Trelinski, G. (1983). Spontaneous Mathematization of Situations Outside Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 14, 275-284.
- Voskoglou, M. G. (2006). The Use of Mathematical Modelling as a Tool for Learning Mathematics. *Quaderni di Ricerca in Didattica*. 16, 53-60.