




MATEMATİKSEL MODELLEME VE DEĞERLENDİRME

- 
- Amaç veya araç olarak matematik öğretim sürecinin önemli bir bileşeni olması matematiksel modelleme uygulamalarının ölçme ve değerlendirmesini de önemli bir konuma getirmektedir. Matematiksel modellemenin ölçme ve değerlendirilmesinde yazılı (çoktan seçmeli) testler, proje-tabanlı yaklaşımlar ve yarışmalar gibi çeşitli uygulamalar karşımıza çıkmaktadır.
 - Matematiksel modellemenin amaç olarak görüldüğü yaklaşımlarda sıklıkla döngüsel modelleme süreci teorik çerçeve olarak kullanılmaktadır. Modellemeyi matematik öğretimi için araç olarak gören yaklaşımlarda ise modelleme uygulamaları daha etkili bir matematik öğretiminin gerçekleştirilebileceği bir tür öğrenme ortamı oluşturma olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu tür modelleme uygulamalarında bağlam temelli öğretim ön planda olduğu için biçimsel değerlendirme yöntemi daha yoğun olarak kullanılmaktadır.

MATEMATİKSEL MODELLEMİYİ AMAÇ OLARAK GÖREN YAKLAŞIMLARDA DEĞERLENDİRME

- Sıklıkla döngüsel modelleme sürecindeki aşamalar temel alınarak modelleme beceri ve yeterlikleri belirlenmeye çalışılmaktadır.

Modelleme Yeterlikleri ve Becerileri

- Modelleme becerileri bir modelleme sürecini başarılı bir şekilde tanımlamak için gerekli becerileri ifade ederken modelleme yeterlikleri modelleme becerilerini de kapsayan daha geniş bir kavramdır.

Matematikselsel Modelleme Yeterlikleri ve Alt-yeterlikleri

I Herhangi bir modelleme sürecini bütün aşamalarıyla başarılı bir şekilde tamamlamak için gerekli yeterlikler

Gerçek yaşam problem durumunu anlama ve gerçek duruma bağlı bir model kurma yeterlikleri

- Problem durumu için varsayımlarda bulunma ve durumu sadeleştirme
- Problem durumunu etkileyen nicelikleri belirleme ve değişkenleri belirleme
- Problem durumundaki kullanılabilir bilgiyi seçebilme, gerekli ve gereksiz bilgiyi ayırma

Gerçek modeli kullanarak matematikselsel bir model kurma yeterlikleri

- İlgili nicelikler ve aralarındaki ilişkiyi matematik ile ifade etme
- Uygun matematikselsel notasyonlar seçme ve durumu grafiksel olarak gösterebilme

Matematikselsel soruları kurulan matematikselsel model içerisinde çözme yeterlikleri

- Uygun problem çözme stratejilerini kullanma
- Problemi çözmek için gerekli matematikselsel bilgiyi kullanma

Elde edilen matematiksel sonuçları gerçek yaşam durumu üzerinde yorumlama yeterlikleri

- Matematiksel sonuçları matematik dışı bağlamlarda yorumlama
- Özel bir durum için geliştirilen çözümleri genelleme
- Elde edilen sonuçları uygun matematiksel bir dil kullanarak başkalarına aktarabilme

Elde edilen sonucu doğrulama yeterlikleri

- Elde edilen sonucu eleştirel bir bakışla kontrol etme
- Gerekli olduğu takdirde modelleme sürecini tekrar etme
- Farklı çözüm yollarını inceleme ve çözümün nasıl geliştirilebileceği üzerine düşünme

2 Üstbilişsel modelleme yeterlikleri

3 Gerçek yaşam problemleri oluşturabilme ve bu problemlere çözüm üretme hedefine yönelik çalışabilme yeterlikleri

4 Modelleme sürecinin her bir aşaması ile ilgili deliller sunarak savunabilme ve bunu yazılı olarak ifade edebilme yeterlikleri

5 Matematiğe ve modelleme sorularına karşı olumlu tutum ve inançlara sahip olma.

Modelleme Yeterliklerinin Mikro-Düzyey Değerlendirilmesi

- Döngüsel modelleme süreci temel alınarak tanımlanan matematiksel modelleme becerilerinin her bir aşama için ayrı ayrı ölçülebileceği ana fikrini oluşturmaktadır. Burada sadece modelleme sürecinin aşamalarına odaklanıldığı için modelleme becerileri ifadesi yeterli olmaktadır. Bu fikrin öncüleri olan bir grup araştırmacı modelleme sürecinin her bir aşamasına yönelik çoktan seçmeli sorulardan oluşan bir test geliştirmişlerdir. Bu test ile öğrencilerin modelleme sürecinin hangi aşamasında başarılı olup olmadığı belirlenebilmektedir. Bu testin oluşturulmasında temel alınan döngüsel modelleme süreci; (1) verileri belirleme ve sadeleştirme, (2) hedefi belirginleştirme, (3) problemi formülize etme, (4) değişken, parametre ve sabitleri belirleme, (5) matematikselleştirme, (6) bir matematiksel model seçme, (7) matematiksel gösterimleri kullanma, (8) gerçek yaşam durumu ile kıyaslayarak kontrol etme aşamalarından oluşmaktadır.

Aşağıda verilen problem durumu üzerine düşününüz.

“Yeni bir otobüs hattına kapalı bir durak yapılacaktır. Maksimum sayıda insanın faydalanabilmesi için otobüs durağı nereye yapılmalıdır?” sorusu üzerinde düşününüz.

Otobüs firması bu hizmetten insanların faydalanmasını istemekte fakat talebe göre ek sefer koymayı düşünmemektedir.

Yukarıdaki soruya çözüm bulmaya yönelik oluşturulacak basit bir matematiksel model için aşağıda verilen varsayımlardan (göz önüne alınması gereken durumlardan) hangisi en az önemlidir?

- A. Sadece bir durak yapılacağı varsayımı
- B. Otobüs durağının yapılacağı yolun düz olduğu varsayımı
- C. Yıl içerisinde yağışsız havalardan yağışlı havalardan iki kat fazla hüküm sürmesi
- D. Otobüsün yarım saatlik aralıklarla sefer yapacağı varsayımı.
- E. Otobüs durağına gitmek için yolcuların çok uzun mesafe yürümeyecekleri varsayımı

Şekil 2.1. Verilenleri belirleme ve sadeleştirme becerisine yönelik bir soru örneği

- Modelleme becerilerini yine mikro-düzeyde ölçme ve değerlendirmeye yönelik daha güncel kısa cevaplı ve çoktan seçmeli sorulardan oluşan ölçme aracı geliştirme çabaları mevcuttur. Şekil 2.2'de matematiksel olarak elde edilen bir sonucu gerçek yaşam durumunda kontrol etme yeterliliğini ölçmeye yönelik açık uçlu ve kısa cevaplı bir madde örneği görülmektedir.

Lukas ailesinin tatilde çektikleri, yanda görünen, bir fotoğrafı buluyor. Babasının boy uzunluğunun 1,75 m olduğunu bilerek aşağıdaki hesaplamayı yapıyor:

$$\frac{1,75}{2,4} \cdot 5,2 = 3,8$$

Lukas'ın hesaplamaları sonucunda bulduğu 3,8'in ne anlama geldiğini açıklayınız.




Şekil 2.2. Matematiksel sonucu gerçek durumda kontrol etme yeterliliğini ölçmeye yönelik kısa cevaplı bir madde örneği (Hankeln ve ark., 2019, s. 151)

Modelleme Becerilerinin ve Yeterliklerinin Bütüncül Değerlendirilmesi

- Bütüncül değerlendirmede döngüsel modelleme süreci aşamalarının birbirinden tamamen bağımsız olmadığını ve dolayısıyla ayrı ayrı incelemenin doğru olmayacağı varsayımına dayanmaktadır. Bütüncül değerlendirme yaklaşımını benimseyen çalışmalar modelleme yeterliklerini ağırlıklı olarak bilişsel boyut yönüyle odaklansa da duyuşsal ve üst bilişsel boyutlarıyla ele alan çalışmalar da mevcuttur.

Boyut	Beklenen Beceriler
Boyut 1: Modellemeyi tanıma ve anlama	Modelleme sürecini tanıma Modelleme sürecindeki aşamaları tanıma ve ayırt edebilme
Boyut 2: Bağımsız modelleme	Problemleri yapılandırıp analiz edebilme Soyut nicelikleri analiz edebilme Farklı bakış açıları geliştirebilme Matematiksel model kurabilme ve üzerinde çalışabilme Modeli ve sonuçlarını yorumlayabilme Modeli doğrulayabilme
Boyut 3: Modellemeye üst-bilişsel bakış	Modellemeyi eleştirel olarak analiz edebilme Modeli değerlendirmek için ölçütler geliştirebilme Modellemenin amaçları üzerine derinlemesine düşünme ve fikirler geliştirme Matematiğin uygulamaları üzerine derinlemesine düşünme ve fikirler geliştirme



- 
- Bu boyutlar birbirinden bağımsız ve ayrık olup birinin diğerinden üstün olması veya kapsamı söz konusu değildir. Henning ve Keune'a (2007) göre, hangi boyuta yönelik değerlendirme yapılacaksa o boyutun gerektirdiği becerilere uygun soru veya etkinlikler tasarlanmalıdır.
 - Modelleme sürecinin aşamalarını temel alarak aşamalarını temel alarak. Modelleme yeterliklerinin bilişsel boyutta değerlendirilmesinde kullanılacak en kapsamlı rubrik Tekin-Dede ve Bukova-Güzel tarafından geliştirilmiştir.

Tablo 2.3. Modelleme becerilerini değerlendirme rubrięi (Tekin-Dede ve Bukova-Güzel, 2018, s. 47-48)

Düzeý	Tanımlama
Problemi Anlama	
Düzeý 1	Problemi anlamama, verilenleri ve istenenleri belirlememe ve aralarında ilişki kurmama ya da yanlış ilişki kurma
Düzeý 2	Problemi bir ölçüde anlama, verilenleri ve istenenleri bir ölçüde belirleme fakat aralarında ilişki kurmama ya da yanlış ilişki kurma
Düzeý 3	Problemi tamamen anlama, verilenleri ve istenenleri belirleme, aralarında ilişki kurmama ya da yanlış ilişki kurma
Düzeý 4	Problemi tamamen anlama, verilenleri ve istenenleri belirlemede önemsiz hatalar yapma, aralarında ilişki kurmama
Düzeý 5	Problemi tamamen anlama, verilenleri ve istenenleri belirleme ve aralarında ilişki kurma

Sadeleştirme

- Düzeş 1 Problemi sadeleştirmeme, gerekli/gereksiz değişkenleri belirlememe ve yanlış varsayımlarda bulunma
- Düzeş 2 Problemi kısmen sadeleştirme, gerekli/gereksiz değişkenleri bir ölçüde belirleme ve yanlış varsayımlarda bulunma
- Düzeş 3 Problemi sadeleştirme, gerekli/gereksiz değişkenleri belirleme ve bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlarda bulunma
- Düzeş 4 Problemi sadeleştirme, gerekli/gereksiz değişkenleri belirleme ve gerçekçi varsayımlarda bulunma



Düzyey	Tanımlama
Düzyey 3	Bir ölçüde kabul edilebilir varsayımlara dayalı olarak doğru matematiksel model(ler) oluşturma
Düzyey 4	Gerçekçi varsayımlara dayalı olarak eksik/yanlış matematiksel model(ler) oluşturma ve bunları birbirleriyle ilişkilendirme
Düzyey 5	Gerçekçi varsayımlara dayalı olarak gerekli matematiksel model(ler)i doğru oluşturma, bunları açıklama ve birbirleriyle ilişkilendirme

20221912

Matematiksel Olarak Çalışma


- Düzyey 1 Matematiksel çözüm sunmama, oluşturulan modelleri yanlış bir şekilde çözmeye ya da yanlış matematiksel modeli çözmeye çalışma
- Düzyey 2 Eksik/Yanlış oluşturulan matematiksel modellerin çözümünde eksiklikler/hatalar içirme
- Düzyey 3 Eksik/Yanlış oluşturulan matematiksel modelleri doğru çözmeye
- Düzyey 4 Doğru oluşturulmuş matematiksel modellerin çözümünde eksiklikler/hatalar içirme
- Düzyey 5 Doğru oluşturulmuş matematiksel modelleri çözerek doğru matematiksel sonuçlara ulaşma

Yorumlama

- Düzyey 1 Elde edilen matematiksel çözüümü gerçek yaşam bağlamında yanlış yorumlama ya da yorumlamama
- Düzyey 2 Hatalı/Eksik matematiksel çözüümü gerçek yaşam bağlamında eksik yorumlama
- Düzyey 3 Hatalı/Eksik matematiksel çözüümü gerçek yaşam bağlamında doğru yorumlama
- Düzyey 4 Elde edilen doğru matematiksel çözüümü gerçek yaşam bağlamında eksik yorumlama
- Düzyey 5 Elde edilen doğru matematiksel çözüümü gerçek yaşam bağlamında doğru yorumlama

Doğrulama

- Düzey 1 Doğrulama yapmama ya da yanlış doğrulama yapma
- Düzey 2 Kısmen doğrulama yapma, belirlenen hataları düzeltmeme
- Düzey 3 Kısmen doğrulama yapma, belirlenen hataları bir ölçüde düzeltme
- Düzey 4 Kısmen doğrulama yapma, belirlenen hataları düzeltme
- Düzey 5 Doğrulama yapma, belirlenen hataları düzeltmeme
- Düzey 6 Doğrulama yapma, belirlenen hataları bir ölçüde düzeltme
- Düzey 7 Doğrulama yapma, belirlenen hataları düzeltme

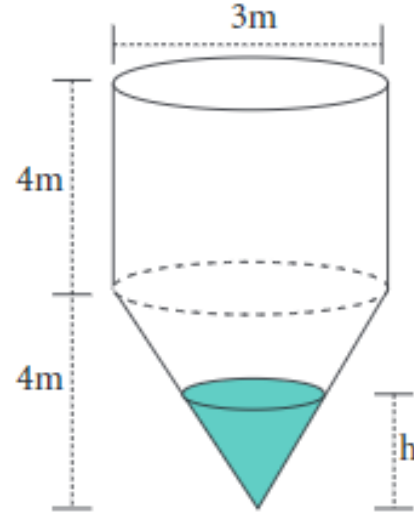
- 
- Bütüncül ya da mikro-düzey değerlendirme rubriklerinin modelleme etkinliklerinin sınıf için uygulamalarında kullanışlı olup olmadığı üzerine düşünülmesi gereken bir diğer konudur. Örneğin; 40-45 dakikalık bir ders saatinde uygulanacak olan bir modelleme etkinliğini bu rubriğe göre değerlendirmek ne kadar gerekli ve ne kadar mümkündür? Etkinlik esnasında, bir öğretmenin grupları dolaşırken ortaya çıkan farklı düşünme biçimlerini bu rubriğe göre hızlıca etiketlemesi hem mümkün görünmemekte hem de öğrencilerin anlık olarak ortaya koyduğu farklı ve üretken düşünme biçimlerindeki derinliği kaçırmamasına neden olabilir. Modelleme uygulamalarının değerlendirilmesinde sadece ürüne değil, sürece de odaklanılması öğrencilerin nasıl düşündüğünü anlamak açısından önemlidir. Bu rubriğin sürekli kullanımı durumunda öğretmen ve öğrencilerin bu ölçütlere aşina olması biçimsel değerlendirmeyi destekleyecek bir diğer noktadır.

MATEMATİKSEL MODELLEMİYİ MATEMATİK ÖĞRETİMİ İÇİN ARAÇ OLAN GÖREN YAKLAŞIMLARDA DEĞERLENDİRME

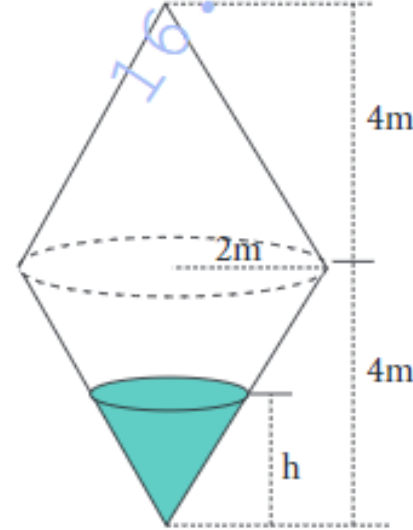
- **Ortaya Çıkan Modelleme**
- Öğrencilerin matematiksel kavramları ve modelleri öğrenmeleri uygun bağlamlar ve öğrenme ortamları tasarlanıp öğrencilerin kendilerinin keşfetmesiyle gerçekleşmelidir. Bu yaklaşıma göre modelleme etkinliklerinin sınıf içi uygulamalarında yönlendirici keşfettirme yönteminin bir öğrenme ortamı tasarlama stratejisi olarak benimsendiği görülmektedir. Yönlendirici keşfettirme yöntemi ile önceden tasarlanmış sorularla öğrencilerin ham ve fiziksel modellerden daha soyut ve biçimsel modellere ulaşması hedeflenmektedir. Döngüsel modelleme süreci çerçevesinden bakıldığında, bu etkinlikte öğrencilere gerçek model resimler kullanılarak hazır verilmiş olup onlardan sadece “Gerçek Modeli Kullanarak Bir Matematiksel Model Kurma”, “matematiksel soruları kurulan matematiksel model ile çözme” ve “elde edilen matematiksel sonuçları gerçek yaşam durumları üzerinde yorumlama aşamalarını gerçekleştirmeleri istenmektedir.

SU DEPOSU

Aşağıda iki farklı depo şekli görülmektedir. Bu depolar sabit debili bir musluk ile doldurulmaktadır. Yüksekliğe bağlı hacmin nasıl değiştiğini gösteren grafik çiziniz ve nasıl çizdiğinizi açıklayan bir yönerge yazınız.




Şekil 1

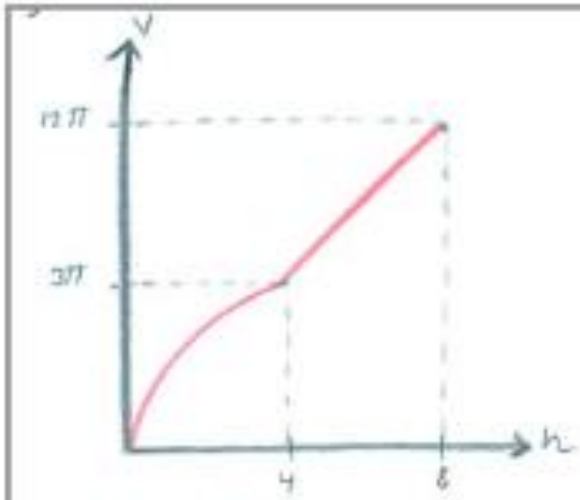


Şekil 2

Raporunuzda aşağıdaki soruları sırayla cevaplandırınız:

- Hacim ile yükseklik ilişkisi bir fonksiyon belirtir mi? Grafiğini çizerek tartışınız.
- Çizdiğiniz grafiği de göz önünde bulundurarak, (eğer hacim ile yükseklik arasındaki ilişki bir fonksiyon belirtiyorsa) depo üzerindeki farklı geometrik şekiller arasındaki geçiş noktasında türev var mıdır? Tartışınız.
- Hacim ile yükseklik arasındaki ilişki cebirsel bir fonksiyon ile modellenebilir mi? Eğer mümkünse bu cebirsel ifadeyi bulunuz.
- (b) şıkta ulaştığınız sonucu (c) şıkta elde ettiğiniz cebirsel model üzerinde test ediniz. Nasıl bir sonuç elde ettiniz?

- 
- Etkinlik aşamalı olarak sorulan alt sorularla, önce bir kavram çatışması oluşturarak kritik nokta ve bu noktada türevin olup olmamasının ne anlama geldiğine yönelik öğrencileri daha ileri düzey ve daha gelişmiş bir model oluşturmayı hedeflemektedir. İlk iki soru (a ve b), öğrencilerin verilen resimlerden yola çıkarak hacim ile yükseklik ilişkisine yönelik bir grafik oluşturma ve bu grafiklere bakarak geçiş noktasında türevin olup olmadığını yorumlamasını istemektedir. İlk iki aşamada öğrenciler gerçek durumu sezgisel algılayışlarına göre çizdikleri grafikler ham, gelişmemiş model olarak görülebilir. İlk iki aşamaya yönelik öğrencilerden gelen bazı cevaplar aşağıda gösterilmektedir.

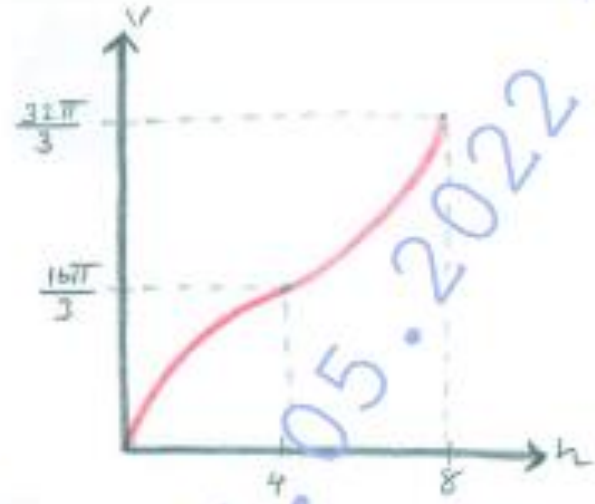


Şekil I-


Geometrik şekiller arasında geçiş noktası (kritik nokta) $x=4m$ 'dir. Grafiği incelediğimizde kırılma noktası olduğu için türev yoktur.

Şekil II.

Geometrik şekiller arasında geçiş noktası $x=4m$ 'dir. Geçiş noktasında fonksiyonumuz süreklidir ve kırılma yoktur. Bu yüzden $x=4m$ 'de türevlidir.



Şekil 3.2. Depo-1 ve Depo-2 için öğrencilerin grafik çizimleri ve türev yorumları

- 
- Şekilde görüldüğü gibi, analiz dersini alan öğrencilerin grupça yaptıkları çözümlerde verilen cevapların çoğu ilk depo için keskin geçişli bir grafik, ikinci depo için ise daha düzgün bir grafik çizmişlerdir.
 - Üçüncü ve dördüncü aşamalar ise hacim-yükseklik ilişkisini cebirsel bir fonksiyon olarak ifade etmelerini ve bu fonksiyon denklemini kullanarak ilk iki aşamada öne sürdükleri fikirlerin doğru olup olmadığını kontrol etmelerini istemektedir. Burada iki aşama arasındaki fark öğrencilerde zihinsel bir çatışma meydana getirecektir.
 - Bu süreçte öğretmenin biçimsel değerlendirmeyi etkili bir şekilde kullanabilmesi için öncelikle iyi bir dinleyici olması ve öğrencilerin düşünme biçimlerini doğru anlaması gerekir. Uygun sorular sorarak öğrencilerin hatalarını kendilerinin fark etmesi sağlanmalıdır. Yönlendirici-keşfettirme stratejisine uygun, sınıf tartışmaları açısından zengin bir öğrenme ortamı oluşturmak açısından da önemlidir.