5. KALAN SINIFLAR VE LANGRANGE TEOREMİ

$\mathbb{Z}$ grubunda $a \equiv b(mod\ m) \Leftrightarrow m|a-b \Leftrightarrow a-b \in \langle m \rangle = \{mk : k \in Z\}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi bu kavramı herhangi bir çarpımsal gruba genişletelim.

Tanım 5.1 : G bir grup ve $H < G$ olsun. G de $\equiv$ bağıntısını $a \equiv b(\mathrm{mod}\, H) \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ ile tanımlayalım.

Önerme 5.2 : $H < G$ alt grubuna göre Tanım 5.1 de tanımlanan $\equiv$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat.

i) $a \in G$ için $aa^{-1} = e \in H$ olduğundan, $a \equiv a(mod\ H)$ dır.

ii) $a, b \in G$ için $a \equiv b(\mathrm{mod}\, H) \Rightarrow ab^{-1} \in H$ ve $H < G$ olduğundan $ba^{-1} = (ab^{-1})^{-1} \in H$ olur. Böylece $b \equiv a(\mathrm{mod}\, H)$ dır.

iii) $a, b, c \in G$ için $a \equiv b(\mathrm{mod}\, H)$ ve $b \equiv c(\mathrm{mod}\, H) \Rightarrow ab^{-1} \in H$ ve $bc^{-1} \in H$ olduğundan $(ab^{-1})(bc^{-1}) = ac^{-1} \in H$ olur. Bu durumda $a \equiv c(\mathrm{mod}\, H)$ dır.

Önerme 5.3. Önerme 5.2 deki denklik bağıntısına göre $a \in G$ nin sınıfı $\bar{a} = Ha = \{ha : h \in H\}$ alt kümesidir. Ha ya H alt grubuna göre a nın **sağ denklik (kalan) sınıfı** denir.

İspat. Denklik sınıfı tanımına göre, $\bar{a} = \{b \in G : b \equiv a(\mathrm{mod}\, H\}$ dır. Böylece $b \in \bar{a} \Leftrightarrow b \equiv a(\mathrm{mod}\, H) \Leftrightarrow ba^{-1} \in H \Leftrightarrow b \in Ha$ bulunur. Buradan $\bar{a} = Ha$ elde edilir.

Benzer şekilde sol denklik sınıfları da tanımlanabilir :

Önerme 5.4 : G bir grup ve $H < G$ olsun. $a \equiv b(modH) \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ ile tanımlı $\equiv$ bağıntısı G de bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre, $a \in G$ elemanının sınıfı $aH = \{ah : h \in H\}$ alt kümesidir. aH ye H alt grubuna göre a nın **sol denklik (kalan) sınıfı** denir.

Not 5.5.

(i) H, G grubunun alt grubu olsun. H nin kendisi $H = e_G H = H e_G$ olduğundan hem sol hem de bir sağ kalan sınıfıdır.

(ii) G bir toplamsal grup ve $H < G$ olsun. $a \in G$ elemanının sol denklik sınıfı $a + H = \{a + h : h \in H\}$ ve sağ denklik sınıfı $H + a = \{h + a : h \in H\}$ dır.

Sonuç 5.6. G bir grup ve $H < G$ olsun. $a, b \in G$ olmak üzere $aH, bH(Ha,\ Hb)$ kümeleri için $aH = bH$ $(Ha = Hb)$ veya $aH \cap bH = \emptyset$ $(Ha \cap Hb = \emptyset)$ dır.

İspat. Önerme 5.3 ve Önerme 5.4 den aH ve $bH(Ha, Hb)$ bir sınıfa ayrılışın herhangi iki sınıfı olduğundan $aH = bH$ $(Ha = Hb)$ veya $aH \cap bH = \emptyset$ $(Ha \cap Hb = \emptyset)$ elde edilir.

Örnek 5.7. $G = S_3 = \{(1), (123), (132), (12), (13), (23)\}$ ve
$H = A_3 = \langle(123)\rangle = \{e, (123), (132)\}$ olsun.
$x = (12)$ ise

$$xH = \{(12), (12)(123), (12)(132)\} = \{(12),(23),(13)$$
$$Hx = \{(12), (123)(12), (132)(12)\} = \{(12),(13),(23)\}$$

$xH = Hx$ fakat $h = (123)$ alırsak $xh \neq hx$ dir. Ayrıca $G = H \cup (12)H$ dır.

Her zaman $xH = Hx$ olmak zorunda olmadığını aşağıdaki örnekten görebiliriz.

Örnek 5.8. S_3 de $K = \{e, (12)\}$ alt grubunu göz önüne alalım. $x = (123)$ için
$xK = \{(123), (123)(12)\} = \{(123),(13)\}$
$Kx = \{(123), (12)(123)\} = \{(123),(23)\}$
Böylece $xK \neq Kx$ dır.

Örnek 5.9. $|a| = 6$ olmak üzere $G = \langle a\rangle$ olsun. Şu halde $H = \langle a^3\rangle$ alt grubuna göre sağ denklik sınıflarının

$$H = He = \{e, a^3\} = Ha^3, \quad Ha = \{a, a^4\} = Ha^4, \quad Ha^2 = \{a^2, a^5\} = Ha^5$$

olduğu görülür. Böylece $G = H \cup Ha \cup Ha^2$ elde ederiz.

Örnek 5.10. $|a| = 6$ olmak üzere $G = \langle a\rangle$ olsun. Şu halde $K = \langle a^2\rangle$ alt grubuna göre sağ denklik sınıfları $K = \{e, a^2, a^4\}$ ve $Ka = \{a, a^3, a^5\}$ olmak üzere $G = K \cup Ka$ dır.

Örnek 5.11. Z toplamsal grubunun $4Z$ alt grubuna göre sağ kalan sınıflarını bulalım, $4Z = 4Z+0 = \{4k : k \in Z\}$, $1 \notin 4Z$ olduğundan $4Z + 1 = \{4k + 1 : k \in Z\}$ ve bu şekilde devam edersek $4Z + 2 = \{4k + 2 : k \in Z\}$ ve $4Z + 3 = \{4k + 3 : k \in Z\}$ dir. Her tamsayı $0 \leq r \leq 3$ olmak üzere $4k + r$ şeklinde olduğundan sağ denklik sınıfları $4Z, 4Z + 1, 4Z + 2$, $4Z + 3$ olur.

Önerrme 5.3 ve Önerme 5.4 den aşağıdaki ifadeler kolaylıkla ispatlanabilir.

Önerme 5.12. G bir grup ve $H < G$ olsun. $a, b \in G$ ise

(i) $a \in Ha$ $(a \in aH)$
(ii) $Ha = H \Leftrightarrow a \in H$ $(aH = H \Leftrightarrow a \in H)$
(iii) $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ $(aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H)$
(iv) $a \in Hb$ ise $Ha = Hb$ $(a \in Hb$ ise $aH = bH)$

Lemma 5.13. G bir grup ve $H< G$ olsun. Şu halde $H<G$ alt grubuna göre sağ ve sol denklik sınıflarının sayısı aynıdır.

İspat. H nin G grubuna göre sol denklik sınıfları $L = \{aH: a \in G\}$ ve sağ denklik sınıfları $R = \{Ha: a \in G\}$ olsun. Şimdi $\forall aH \in L$ için $f(aH) = Ha^{-1}$ ile $f: L \to R$ yi tanımlayalım. Her $a \in G$ için $Ha^{-1} \in R$ olduğu açıktır.
***f* iyi tanımlıdır :** $aH, bH \in L$ olmak üzere $aH = bH$ olsun. Şu halde $b^{-1}a \in H$ olduğu görülür. Bundan dolayı $b^{-1}(a^{-1})^{-1} = b^{-1}a \in H$ ve $Hb^{-1} = Ha^{-1}$ dır. Sonuç olarak $f(aH) = f(bH)$ dır. Yani f iyi tanımlıdır.
***f* bire-birdir :** $f(aH) = f(bH)$ olsun. Şu halde $Ha^{-1} = Hb^{-1}$ ve böylece $a^{-1}(b^{-1})^{-1} \in H$, yani $a^{-1}b \in H$ dir. Şu halde $b^{-1}a = (a^{-1}b)^{-1} \in H$ ve böylece $aH = bH$ dır.
***f* örtendir :** Her $Ha \in R$ için $Ha = H(a^{-1})^{-1} = f(a^{-1}H)$ ve $a^{-1}H \in L$ dir.

Tanım 5.14. G bir grup ve $H < G$ olsun. $H<G$ alt grubuna göre sağ(veya sol denklik) sınıflarının sayısına H alt grubunun G içindeki **indeksi** denir ve $(G:H)$ ile gösterilir.

Lemma 5.15. G bir grup ve H, G nin sonlu alt grubu olsun. Şu halde $\forall a \in G$ için $|H| = |Ha| = |aH|$ dır.

İspat. $\forall\, h \in H$ için $f(h) = ha$ ile $f: H \to Ha$ fonksiyonunu tanımlayalım.
***f* iyi tanımlıdır :** $h, h_1 \in H$ için $h = h_1 \Rightarrow ha = h_1a \Rightarrow f(h) = f(h_1)$.
***f* bire-bir :** $f(h) = f(h_1) \Rightarrow ha = h_1a \Rightarrow h = h_1$.
***f* örten :** $h \in H$ olmak üzere $ha \in Ha$ olsun. Şu halde $ha = f(h)$ dır.
Böylece $|H| = |Ha|$ dır. Benzer şekilde $|H| = |aH|$ olduğu görülür. Sonuç olarak, G grubunun her kalan sınıfında aynı sayıda eleman vardır.

Langrange Teoremi 5.16. G sonlu bir grup ve $H < G$ ise H nin mertebesi G nin mertebesini böler.

İspat : G grubunun H alt grubuna göre farklı sağ kalan sınıfları $Ha_1, Ha_2, \dots, Ha_k$ olsun. Şu halde $G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \dots \cup Ha_k$ ve her $i \neq j(1 \leq i, j \leq k)$ için $Ha_i \cap Ha_j = \emptyset$ dir.
Lemma 5.15 den $\forall\, i \in \{1,2, \dots, k\}$ için $|Ha_i| = |H|$ olduğundan $|G| = |Ha_1| + |Ha_2| + \cdots + |Ha_k| = |H| + |H| + \cdots + |H| = (G:H)|H| = k|H|$ dır. Böylece H nin mertebesi G nin mertebesini böler.

Sonuç 5.17. G sonlu bir grup ve $H < G$ ise $(G:H) = \frac{|G|}{|H|}$ dir.
İspat. Teorem 5.16 ispatından elde edilir.

Sonuç 5.18. $|G| = n$ ise $\forall a \in G$ için, $a^n = e$ dir. Şu halde $|a|||G| = n$ dir.

İspat : $H = \langle a \rangle < G$ olsun. Lagrange teoremine göre, $m = |H| = |a|||G| = n$ dir. Böylece $n = mt, (\, t \in Z)$ dır. Şu halde $a^n = (a^m)^t = e$ dir.

Teorem 5.19. G bir grup ve $K < H < G$ olsun. Şu halde $(G:K) = (G:H)(H:K)$ dır. Eğer indekslerden herhangi iki tanesi sonlu ise diğeri de sonludur.

İspat. $a_i \in G$ olmak üzere $G = \bigcup_{i \in I} Ha_i$ olsun. Her $i \neq j \in I$ için $Ha_i \cap Ha_j = \emptyset$ ve $|I| = (G:H)$ dır. Benzer şekilde $b_j \in H$ olmak üzere $H = \bigcup_{j \in J} Kb_j$ ve $i \neq j \in J$ için $Kb_i \cap Kb_j = \emptyset$ ve $|J| = (H:K)$ olur. Bundan dolayı $G = \bigcup_{i \in I} Ha_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J} Kb_j \right) a_i = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} Kb_j\, a_i$ elde ederiz. Şimdi $\forall (i,j) \in I \times J$ için $Kb_j a_i$ sağ kalan sınıflarının ara kesitlerinin boş olduğunu gösterelim. Böylece $(G:K) = |I \times J| = |I||J| = (G:H)(H:K)$ olduğu gösterilmiş olur. Eğer $Kb_j a_i = Kb_r a_t$ ise $b_j a_i = kb_r a_t$ olacak şekilde $k \in K$ vardır. $b_j, b_r, k \in H$ olduğundan $Ha_i = Hb_j a_i = Hkb_r a_t = Ha_t$ ve bundan dolayı $i = t$ dir. Böylece $b_j a_i = kb_r a_t$ olduğundan $b_j = kb_r$ dir. Bundan dolayı $Kb_j = Kkb_r = Kb_r$ ve $j = r$ dir. Sonuç olarak $Kb_j a_i$ sağ kalan sınıflarının arakesitlerinin boş küme olduğunu görmüş olduk. Teoremin son ifadesinin doğru olduğu açıktır.

Örnek 5.20. Mertebesi asal olan grubun alt grupları, kendisi ve birimidir.

Çözüm: G bir grup, $|G| = p$ (p asal sayı) ve $H < G$ olsun. Lagrange teoreminden $|H|\,|\,|G|$ olduğundan $|H| = 1$ ve $|H| = p$ dir. Böylece $H = \{e_G\}$ veya $H = G$ dir.

Örnek 5.21. p ve q asal sayılar olmak üzere $|G| = pq$ olsun. G nin mertebesi p ve q olan sadece birer tane alt grubu varsa G devirlidir.

Çözüm. G nin mertbesi p ve q olan alt grupları sırasıyla H ve K olsun. Şu halde $|H \cup K| = |H| + |K| - |H \cap K| = p + q - 1 < pq$ olur. Şimdi $a \in G - H \cup K$ alalım. Langrange teoreminden $|a| = p, |a| = q$ veya $|a| = pq$ dur. Fakat $|a| = p$ olsaydı $H = \langle a \rangle$ olurdu. Benzer şekilde $|a| \neq q$ dur. Sonuç olarak $G = \langle a \rangle$ olduğu görülür.

Teorem 5.22. (Fermat) p bir asal sayı ve $p \nmid a$ olacak şekilde her a tamsayısı için $a^{p-1} \equiv 1 (mod\, p)$ dir.

İspat. Z_p^* grubunu göz önüne alalım. Şu halde $|Z_p^*| = p - 1$ dir. Şimdi $p \nmid a$ olacak şekilde a tamsayısını göz önüne alalım. Böylece $\bar{0} \neq \bar{a} \in Z_p^*$ ve Sonuç 5.18 den $a^{p-1} \equiv 1 (mod\, p)$ dir.

Teorem 5.23. H ve K, bir G grubunun sonlu alt grupları olsun. Şu halde $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$ dır.

İspat. $A = H \cap K$ olsun. H ve K, G grubunun alt grupları olduğu için A da alt gruptur. Ayrıca $A \subseteq H$ olduğundan $A < H$ dır. Langrange teoremin den $|A|\,\big|\,|H|$ olur. Şimdi $n = \frac{|H|}{|A|}$ olduğunu kabul edelim. Böylece $(H:A) = n$ ve A nın H de n tane farklı sol denklik sınıfı vardır. $\{x_1 A, x_2 A, \dots, x_n A\}$ nın A nın H deki tüm sol denklik sınıfları olsunlar.

Şu halde $H = \bigcup_{i=1}^{n} x_i A$ dır. $A \subseteq K$ olduğundan $HK = (\bigcup_{i=1}^{n} x_i A\ )K = \bigcup_{i=1}^{n} x_i K$ dır. Şimdi $i \neq j$ için $x_i K \cap x_j K = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $x_i K \cap x_j K \neq \emptyset$ olacak şekilde $i \neq j$ olsaydı $x_i K = x_j K$ olurdu. Böylece $x_i^{-1} x_j \in K$ ve $x_i^{-1} x_j \in H$ olduğundan $x_i^{-1} x_j \in A$ dır. Bundan dolayı $x_i A = x_j A$ çelişkisi elde edilir. Yani, K nın tüm $x_1 K, x_2 K, \dots, x_n K$ sol kalan sınıfları farklıdır. Her $i = 1,2,\dots,n$ için $|K| = |x_i K|$ olduğundan $|HK| = |x_1 K| + |x_2 K| + \cdots + |x_n K| = \underbrace{|K| + |K| + \cdots + |K|}_{n\ tane} = n|K| = \frac{|H||K|}{|A|} = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$ elde edilir.

Sonuç 5.24. H ve K, bir G grubunun $H \cap K = \{e\}$ olacak şekilde sonlu alt grupları olsunlar. Şu halde $|HK| = |H||K|$ dır.

Şimdi Langrange teoreminin tersinin doğru olmadığını gösterelim.

Örnek 5.25. A_4 grubunun 6. mertebeden alt grubu yoktur.

Çözüm. H, A_4 grubunun mertebesi 6 olan alt grubu olsun. A_4 grubu 8 tane 3-lü devir içerdiğinden ve $|H| = 6$ olduğundan ve $\alpha \notin H$ olacak şekilde $\alpha \in A_4$ 3-lü deviri vardır. Şu halde $\alpha^2 = \alpha^{-1} \notin H$ olur. $K = \{e, \alpha, \alpha^2\}$ olsun. Böylece K, A_4 grubunun mertebesi 3 olan alt grubudur ve $H \cap K = \{e\}$ dir. Bundan dolayı $|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = 6.3 = 18 > |A_4|$ çelişkisini elde etmiş oluruz.

Sorular

1) G bir grup ve $H < G$ olsun. $H^2 = H$ olduğunu gösteriniz. ($H^2 = HH = H$)

2) G bir grup ve $H<G$ olsun. Şu halde $aH < G \Leftrightarrow a \in H$ olduğunu gösteriniz.

3) $8\mathbb{Z}$ nin $\mathbb{Z}$ deki tüm kalan sınıflarını belirleyiniz.

4) Z_{30}^{*} grubunda $H = \{1,11\}$ in tüm sol denklik sınıflarını bulunuz.

5) S_3 grubunda,

i) $H = \{e, (23)\}$ ün tüm sağ kalan sınıfları kaç tanedir?

ii) i) deki H alt grubu için $H(123)$, bir K alt grubunun sol kalan sınıfı olacak şekilde $K < G$ yi bulunuz.

6) $H = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ olmak üzere H nin A_4 deki sol kalan sınıflarını bulunuz.

7) $|a| = 15$ olsun. $\langle a^4 \rangle$ grubunun $\langle a \rangle$ grubu içindeki tüm sol kalan sınıflarını bulunuz.

8) $K = \langle (123) \rangle$ nin A_4 grubundaki sağ ve sol kalan sınıflarını bulunuz.

9) G bir grup $H < G$ olmak üzere $HaH = \{h_1 a h_2 : h_1, h_2 \in H\}$ ile tanımlandığına göre, herhangi iki $a, b \in G$ için ya $HaH \cap HbH = \emptyset$ ya da $HaH = HbH$ dir.

10) G mertebesi 143 olan bir grup olsun. G nin tüm alt gruplarını bulunuz.

11) G sonlu bir grup ve $H < G, K < G, |H| = 25$ ve $|K| = 36$ olsun. Aşağıdaki ifadeleri ispatlayınız.

a) $H \cap K = \{e\}$

b)$900/|G|$

12) G bir grup, $H \leq G, K \leq G, H \neq K$ ve $|H| = |k| = 16$ ise, $24 \leq |H \cup K| \leq 31$ olduğunu gösteriniz.

13) G, H ve K grupları $K \subseteq H \subseteq G$ olacak şekilde sonlu gruplar ve $(G{:}K)$ bir asal sayı ise $H = K$ veya $H = G$ olduğunu gösteriniz.

14) G bir grup ve p bir asal sayı olsun. $|G| = p^2$ ise G devirli gruptur veya $\forall g \in G$ için $g^p = e$ dir.

15) **a)** G= $\langle a \rangle$ ve $|a| = 30$ ise $(G{:}\langle a^6 \rangle)$ indeksini bulunuz.

b) $G = \langle a \rangle$ ve $|a| = n$ olsun. Eğer $d|n$ ise $(G{:}\langle a^d \rangle)$ indeksini bulunuz.

16) G bir grup ve p bir asal sayı olsun.

a) H ve K, G nin mertebesi p olan alt grupları iseler $H = K$ veya $H \cap K = \{e\}$ olduğunu gösteriniz.

b) $H_1, H_2, \ldots, H_k$ mertebeleri p asal sayısı olan birbirinden farklı G nin alt grupları iseler $|H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k| = 1 + k(p-1)$ olduğunu gösteriniz.

17) G sonlu bir grup ise $|x|||M(x)|$ olduğunu gösteriniz.

18) G bir grup ve $x, y \in G$ olsun. Eğer $|x| = m,\ |y| = n$ ve $(m, n) = 1$ ise $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$ olduğunu gösteriniz.

19) H,K ve N bir G grubunun alt grupları ve $H < N$ olsun. Şu halde $HK \cap N = H(K \cap N)$ olduğunu gösteriniz.

20) G bir grup ve $|G| < 200$ olsun. G nin mertebesi 25 ve 35 olan alt grupları varsa G nin mertebesini bulunuz.

21) A ve B, G grubunun alt grupları olsunlar. A grubunun mertebesi bir asal sayı ise $A \cap B = \{e\}$ veya $A \subseteq B$ olduğunu gösteriniz.

22) n > 1 olmak üzere $(S_n : H) \leq n$ olacak şekide S_n simetri grubunun öz H alt grubunun varlığını gösteriniz.

23) S_3 grubunun tüm alt gruplarını bulunuz.

24) Quaternion grupların tüm alt gruplarını bulunuz.

25) D_4 dihedral grubun tüm alt gruplarını bulunuz.

26) *(Z : nZ)* indeksini bulunuz.

27) G, mertebesi 35 olan bir grup ve A, B ise mertebesi 5 ve 7 olan iki alt grubu ise $G = AB$ dir, ispatlayınız.

28) G grubunun mertebesi n ise G nin her elememanı $x^n - e = 0$ denkleminin bir çözümüdür.

29) Aşağıdaki ifadeler doğru/yanlış mıdır? Doğru ise ispatlayınız, yanlış ise bir ters örnek bulunuz.

i) Bir grubun her sağ kalan sınıfı aynı zamanda bir sol kalan sınıfıdır.
ii) Mertebesi 40 olan bir grubun mertebesi 12 olan bir alt grubu vardır.
iii) $G = \langle a \rangle$ mertebesi 42 olan bir devirli grup ise$[\, G : \langle a^7 \rangle] = 6$ dır.
iv) Mertebesi p^2 (p asal) olan grup devirlidir.
v) H ve K, bir G grubunun iki alt grubu, $|H| = p$ ve $|K| = q$ olsun.(p ve q farklı asal sayılar). Şu halde $|HK| = pq$ dır.
vi) A_n nin S_n grubundaki indeksi *2* dir.
vii) Her grup kendisinin sol kalan sınıfıdır.
viii) Bir grubun sol kalan sınıflarının sayısı, grubun mertebesini böler.
ix) $Ha = Hb$ ise $b \in Ha$ dır.
x) $aH = bH$ ise $Ha^{-1} = Hb^{-1}$ dir.